Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen 73 59 35 23

EKSAMEN I FAG SIF5015 DISKRET MATEMATIKK

Mandag 13. mai 2002
Tid: 0900–1400

Hjelpemidler (Kode C):Enkel kalkulator (HP 30S),
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Sensuren faller i uke 24.

Alle svar skal grunngis.

Oppgave 1 Det er gitt 3 utsagnslogiske formler

$$
\begin{aligned}
A &= ((p \to p) \to q) \leftrightarrow \neg q \\
B &= \neg(p \to (q \to r)) \\
C &= (\neg p \vee (q \to r)) \wedge (p \to q) \wedge \neg(p \to r)
\end{aligned}
$$

a) Hvilke av formlene over er tilfredsstillbare?

For hver av formlene som er tilfredsstillbare, angi en tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene i formelen som viser at den er tilfredsstillbar.

b) Bruk et Karnaughdiagram til å finne et enklest mulig uttrykk på disjunktiv normalform for den boolske funksjonen

$$F(x, y, z, w) = (x + \bar{y})(\bar{x} + \bar{w}) + \overline{(\overline{xzw} + y)}$$

Oppgave 2

a) Beregn 2^{1213} **mod** 13.

b) Finn det minste positive hele tallet x slik at

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod{13} \\ x &\equiv 5 \pmod{14} \\ x &\equiv 1 \pmod{15} \end{aligned}$$

Oppgave 3

Vis følgende utsagn ved matematisk induksjon.

a) $1+3+5+\cdots+(2n+1) = n^2$ for alle naturlige tall $n \geq 1$.

Trykkfeil.
Det skulle stått $(2n-1)$.

b) $n^2 > 2n+1$ for alle naturlige tall $n \geq 3$.

Oppgave 4 En trofast bankkunde setter et beløp $b =$ kr. 734 inn på sin konto i begynnelsen av hvert kvartal. (1 kvartal = 3 mnd.)

Banken betaler ut renter månedlig etter en rentefot på $r = 5\%$ pr. år.

La c_n være det beløpet som kunden har på kontoen ved slutten av det n-te kvartalet, når $c_0 =$ kr. 0.

(Merk at c_n er beløpet før innskudd nr. $n+1$ gjøres.)

a) Beregn c_1.

b) Skriv opp en rekursjonsligning for c_n, og beregn det beløpet som kunden har på kontoen etter 45 år. (Dog før kunden setter inn sitt faste beløp.)

Oppgave 5 La $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, og la R være relasjonen på X gitt ved at

$$aRb \Leftrightarrow 3a \equiv 5b \pmod{7}.$$

a) Tegn grafen til R, og finn matriserepresentasjonen M_R.

b) Vis at R^* er en ekvivalensrelasjon, og bestem partisjonen assosiert med R.

Oppgave 6 En kontekstfri gramatikk $G = (V, T, S, P)$ er gitt som følger. Ikketerminalene er $N = V - T = \{S, Q, L, U\}$, terminalene er $T = \{a, b, c, \neg, \vee, \wedge, (,)\}$, og produksjonene skrevet på Backus-Naur form er

$$\begin{aligned} S &::= Q \mid S \vee Q \\ Q &::= L \mid Q \wedge L \\ L &::= U \mid \neg U \\ U &::= a \mid b \mid c \mid (S) \end{aligned}$$

Tegn derivasjonstrærne til følgende ord i $L(G)$.

a) $a \wedge \neg b \wedge c \vee \neg a \wedge b \wedge \neg c$.

b) $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$.

Oppgave 7 La L være språket representert ved det regulære uttrykket

$$w = 1^*0 \cup 1(01)^*$$

a) Finn en ikkedeterministisk endelig automat M slik at $L(M) = L(w) = L$. Representer M som en graf.

b) Finn en deterministisk endelig automat N slik at $L(N) = L(M) = L$. Representer også N som en graf.