Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Paul Arne Østvær 73 55 02 81

EKSAMEN I FAG SIF5015 DISKRETMATEMATIKK

Mandag 14. mai 2001
Tid : 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til utarbeidet liste.

Alle svar skal begrunnes.

Sensurfrist: 11. juni 2001

Oppgave 1

Bevis følgende logiske implikasjoner

a) $[(p \to q)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$

b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$

Oppgave 2

Fire ektepar går på kino. De har billetter til bakerste rad, hvor det er 8 seter. På hvor mange måter kan de 8 personene plasseres hvis ingen får lov til å sitte ved siden av ektefellen sin?

Hint: Bruk prinsippet for inklusjon - eksklusjon.

Oppgave 3

a) Hvilke x oppfyller kongruensen $3x \equiv 1 \bmod 5$?

Regn ut $7^{89} \bmod 29$.

b) Hele 500 studenter møtte opp på den første forelesningstimen i Diskret Matematikk. I pausen bestemte x studenter seg for ikke å følge neste forelesningstime. Når resten av de 500 studentene ble delt opp i grupper på 3 personer, ble det 1 student til overs. En tilsvarende oppdeling i grupper på 5 og 7 personer resulterte i at henholdsvis 3 og 6 studenter ble til overs. Finn x, gitt at $x < 172$.

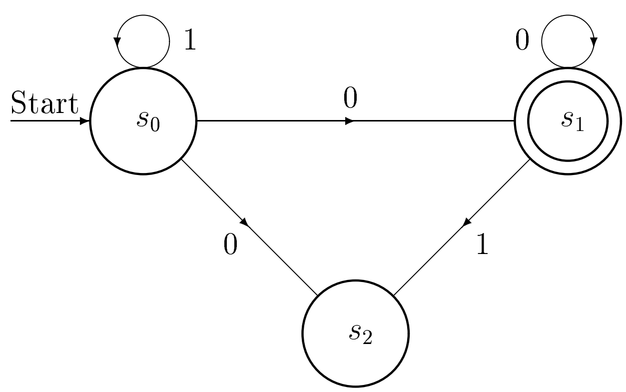
Oppgave 4

La $F(x, y, z) = \bar{y}\,\overline{(\bar{x}y)} + xy + y\bar{z}$ være en Boolsk funksjon.

Finn et enklere uttrykk for F. Tegn et logisk nettverk som representerer F.

Oppgave 5

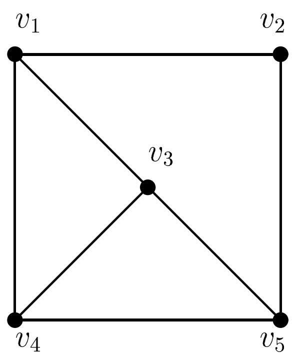
Finn en deterministisk endelig tilstandsautomat som gjenkjenner det samme språket som den ikke-deterministiske endelige tilstandsautomaten nedenfor



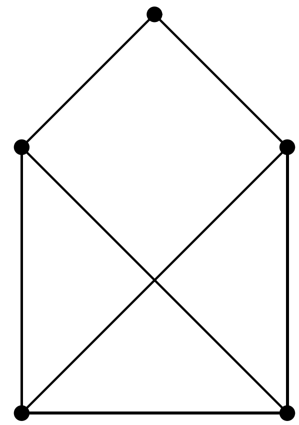
Oppgave 6

a) Betrakt grafene

G_1 :



G_2 :



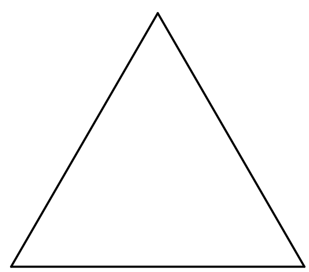
Kan du skrive ned en isomorfi mellom G_1 og G_2?

b) Hvor mange forskjellige veier av lengde 3 fins det mellom v_1 og v_2?

Oppgave 7

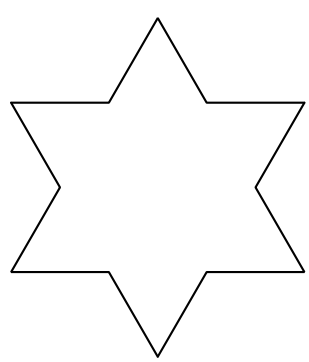
La

s_1:

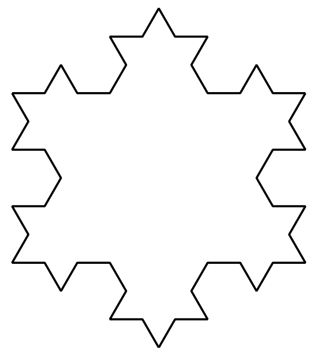


være en likesidet trekant hvor hver kant har lengde 1. Vi deler opp hver kant i tre like lange linjestykker, og erstatter det midterste linjestykket med en likesidet trekant hvor hver kant har lengde 1/3. Resultatet blir

s_2:



Det samme gjøres nå for hver kant i s_2. Den nye figuren vi får blir

s_3: 

hvor hver sidekant har lengde 1/9. Ved å iterere denne prosessen kan vi lage s_n for alle $n \geq 1$.

a) La e_n være antall kanter i s_n. Bevis at $e_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ for $n \geq 1$. La p_n være omkretsen til s_n. Finn en formel for p_n. Hva skjer med p_n når $n \to \infty$?

b) La a_n være arealet til s_n. F.eks. er $a_1 = \sqrt{3}/4$. Finn en rekurensrelasjon for a_n.

c) Bevis ulikheten $\sqrt{3} \cdot 2^{3n-3} < 3^{2n}$ for $n \geq 1$.

d) Bruk del (c) til å bevise ulikheten

$$a_n < 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

e) Bevis at høyresiden av ulikheten i (d) er lik $6\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$. Finn $\lim_{n\to\infty} a_n$.