SIF5012 Matematikk 4K
9. desember 2000

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 10 punkter, 1ab, 2ab, 3ab, 4, 5abc, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Alternativ 1:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b^2}{s-b}\right) = b^2e^{bt} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b^2}{s(s-b)}\right) = \int_0^t b^2e^{b\tau}\,d\tau = b(e^{bt}-1) \;\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b^2}{s^2(s-b)}\right) = \int_0^t b(e^{b\tau}-1)\,d\tau = \Big[e^{b\tau}-b\tau\Big]_0^t = e^{bt}-bt-1$$

Dermed er

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2\sinh bt + e^{bt} - bt - 1 = 2e^{bt} - e^{-bt} - bt - 1$$

Alternativ 2: delbrøkoppspalting.

$$F(s) = \frac{A}{s-b} + \frac{B}{s+b} + \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s^2}, \qquad A=2,\ B=-1,\ C_1=-1,\ C_2=-b$$

som gir samme resultat som ovenfor. Ved skiftteorem 2 får vi

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = f(t-a)u(t-a) = \left[2e^{b(t-a)} - e^{-b(t-a)} - b(t-a) - 1\right]u(t-a).$$

b) Vi Laplacetransformerer først $g(t) = tu(t-1)$ ved skiftteorem 2 og $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$.

$$g(t) = [(t-1)+1]\,u(t-1) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(g) = \left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)e^{-s} = \frac{s+1}{s^2}e^{-s}$$

(Det kunne vi også ha regnet ut direkte fra definisjonen av Laplacetransformasjonen.)
Laplaceransformerer differensialligningen og løser mhp. $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - Y = 2e^{-s} + \frac{s+1}{s^2}e^{-s} \qquad (y(0)=1,\ y'(0)=1)$$

$$Y = \frac{s+1}{s^2-1} + \left(\frac{2}{s^2-1} + \frac{s+1}{s^2(s^2-1)}\right)e^{-s} = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{2}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s-1)}\right)e^{-s}$$

Resultatene i **a)** (med $a=b=1$) gir

$$y = e^t + \left[2e^{t-1} - e^{-(t-1)} - t\right]u(t-1) = \begin{cases} e^t & \text{for } t<1 \\ e^t + 2e^{t-1} - e^{-(t-1)} - t & \text{for } t>1. \end{cases}$$

Vi ser at $y'(t) = e^t$ for $t<1$, dermed har $y(t)$ venstrederivert e i $t=1$. For $t>1$ får vi $y'(t) = e^t + 2e^{t-1} + e^{-(t-1)} - 1$. Da har $y(t)$ høyrederivert $e+2$ for $t=1$, og $y(t)$ er følgelig *ikke* deriverbar for $t=1$.

$\boxed{2}$ **a)** Vi setter $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t) = \sum_{n=1}^\infty B_n e^{-n^2c^2t}\sin nx$ og bestemmer B_n-ene.

$$f(x) \overset{\text{(iii)}}{=} u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty B_n \sin nx \ \ (\text{for } 0\le x\le \pi) \;\Rightarrow\; B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \left[-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\right] + \left[\frac{\pi}{2}\frac{\cos(n\pi/2)}{n} + \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\right]\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} \end{aligned}$$

Dermed får vi

$$B_n = 0 \quad \text{når } n = 2m \quad \text{og} \quad B_n = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \quad \text{når } n = 2m+1$$

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}e^{-(2m+1)^2c^2t}\sin(2m+1)x \qquad \text{oppfyller (i), (ii) og (iii)}$$

b) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i (i) og bruker randbetingelsen (iv).

$$FG' = c^2F''G \;\Rightarrow\; \frac{F''}{F} = \frac{G'}{c^2G} = k \quad (\text{konstant})$$

$$\text{(I)}\quad F'' - kF = 0,\quad F(0)=0,\ F'(\pi)=0, \qquad \text{(II)}\quad G' - kc^2G = 0$$

Bestemmer først $F(x)$ og deretter $G(t)$.

$$\begin{aligned} &\text{(I)}\quad F''-kF=0,\ F(0)=0,\ F'(\pi)=0 \\ &k>0,\ \ k=\mu^2: \quad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\ F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x} \\ &\qquad\qquad\qquad\ \ F(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\ F(x) = 0 \\ &k=0: \qquad\qquad\ \ F(x) = A + Bx,\ F'(x) = B \\ &\qquad\qquad\qquad\ \ F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0,\ F(x) = 0 \\ &k<0,\ \ k=-p^2: F(x) = A\cos px + B\sin px,\ F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px \\ &\qquad\qquad\qquad\ \ F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0,\ B\ne 0 \ \Rightarrow \cos p\pi = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\ \ p = (2m+1)/2, \quad F(x) = \sin[(2m+1)x/2] \quad (B=1) \\ &\text{(II)}\quad G' - kc^2G = 0 \\ &k = -\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; G' + \frac{c^2(2m+1)^2}{4}G = 0 \;\Rightarrow\; G(t) = Ce^{-c^2(2m+1)^2t/4} \end{aligned}$$

Løsningene av (i) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (iv):

$$u(x,t) = Ce^{-c^2(2m+1)^2t/4}\sin\frac{(2m+1)x}{2}, \quad C \text{ vilkårlig konstant},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

3 **a)** Fouriertransformerer $u_{xx} = tu_t$.
(Bruker betingelsene $\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = 0$ når u_{xx} transformeres.)

$$-w^2\widehat{u} = t\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} \quad \text{dvs.} \quad \frac{1}{\widehat{u}}\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -\frac{w^2}{t}, \quad \text{separabel differensialligning}$$

$$\ln|\widehat{u}| = -w^2\ln t + C_1(w) \Rightarrow \widehat{u}(w,t) = C(w)e^{-w^2\ln t} \quad \left(C(w) = \pm e^{C_1(w)}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{u}(w,1) = C(w)e^{w^2\ln 1} = C(w) \\ \widehat{u}(w,1) = \mathcal{F}\{u(x,1)\} = \widehat{f}(w)\end{array}\right\} \Rightarrow C(w) = \widehat{f}(w), \quad \widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)e^{-w^2\ln t}$$

Løsningen kan også skrives $\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)\,t^{-w^2}$.

b) Fra tabell i Rottmann:

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-w^2/4a} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-w^2/4a}, \qquad \text{setter } a = \frac{1}{4\ln A}$$

$$\widehat{g}_A(w) = \mathcal{F}\left(e^{-x^2/4\ln A}\right) = \frac{1}{\sqrt{1/(2\ln A)}}\,e^{-w^2\ln A} = \sqrt{2\ln A}\,e^{-w^2\ln A}$$

Vi bruker uttrykket for $\widehat{g}_A(w)$ med $A = t$ til å skrive $e^{-w^2\ln t}$ som en Fouriertransformert, og finner deretter $u(x,t)$ ved å bruke konvolusjonsteoremet.

$$e^{-w^2\ln t} = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\ln t}}e^{-x^2/4\ln t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\ln t}}\,\mathcal{F}\{h(x,t)\}, \quad h(x,t) = e^{-x^2/4\ln t}$$

$$\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)e^{-w^2\ln t} = \frac{1}{\sqrt{2\ln t}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\left(\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(h)\right)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\ln t}}\,f(x)*h(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\ln t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)h(p,t)\,dp$$

Vi kan altså skrive $u(x,t)$ på den oppgitte formen og $h(x,t) = e^{-x^2/4\ln t}$.

4 Vi kan bruke summeformelen $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1/(1-q)$ for en geometrisk rekke med $|q| < 1$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i+(z-i)} = \frac{1}{i[1-i(z-i)]} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}[i(z-i)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^n$$

for $|i(z-i)| < 1$, dvs. for $|z-i| < 1$. Alternativt:

$$\frac{1}{z} = h(z), \qquad h^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \qquad h^{(n)}(i) = \frac{(-1)^n n!}{i^{n+1}} = \frac{n!}{i}\left(\frac{-1}{i}\right)^n = n!\,i^{n-1}$$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(i)}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,i^{n-1}}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)z} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}(z-i)^{n-1} \qquad \text{for } 0 < |z-i| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)z} = \frac{1}{(z-i)[(z-i)+i]} = \frac{1}{(z-i)^2\left[1+\dfrac{i}{z-i}\right]} = \frac{1}{(z-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i}{z-i}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1} i^m}{(z-i)^m} \qquad \text{for } \left|\frac{-i}{z-i}\right| < 1 \text{ dvs. } 1 < |z-i| < \infty.$$

5 **a)** Løser ligningen $z^3 + 1 = 0$.

$$z^3 = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z = e^{i(\pi+2k\pi)/3}$$

$$z = z_k = \cos(\pi/3 + 2k\pi/3) + i\sin(\pi/3 + 2k\pi/3), \quad k = 0,1,2$$

$$z_0 = \tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), \ z_1 = -1, \ z_2 = \tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$$

Funksjonen $f(z) = e^{\pi iz}/(z^3+1)$ har enkle poler i $z = z_k$, $k = 0,\,1,\,2$, og $z_k^3 = -1$.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) = \left[\frac{e^{\pi iz}}{(z^3+1)'}\right]_{z=z_k} = \frac{e^{\pi iz_k}}{3z_k^2} = \frac{z_k e^{\pi iz_k}}{3z_k^3} = -\frac{1}{3}z_k e^{\pi iz_k}$$

b) Innenfor $C_{R,r}$ har $f(z)$ ett singulært punkt, z_0. Dermed får vi

$$\oint_{C_{R,r}} f(z)\,dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \overset{\mathbf{a)}}{=} 2\pi i\left(-\tfrac{1}{3}z_0e^{\pi iz_0}\right) = -\tfrac{1}{3}\pi i(1+i\sqrt{3})e^{\pi i(1+i\sqrt{3})/2}$$

$$= -\frac{\pi i}{3}(1+i\sqrt{3})e^{-\pi\sqrt{3}/2+i\pi/2} = \frac{\pi}{3}e^{-\pi\sqrt{3}/2}(1+i\sqrt{3}).$$

Fra teorem i Kreyszig 15.4 har vi

$$\lim_{r\to 0}\left(-\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right) = \pi i\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) \quad \text{dvs.} \quad \lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \overset{\mathbf{a)}}{=} -\pi i\left(\frac{1}{3}e^{\pi i}\right) = \frac{\pi i}{3}.$$

c) Vi bruker ML-ulikheten og finner først en øvre skranke for $|f(z)|$ på Γ_R.

$$\left|e^{\pi iz}\right| = \left|e^{\pi i(x+iy)}\right| = \left|e^{-\pi y+i\pi x}\right| = e^{-\pi y} \le 1 \qquad (\text{for } z \text{ på } \Gamma_R \text{ siden } y \ge 0)$$

$$\left|\frac{e^{\pi iz}}{z^3+1}\right| \le \frac{1}{|z^3+1|} \le \frac{1}{|z^3|-1} = \frac{1}{R^3-1} \qquad (z \in \Gamma_R)$$

Siden lengden av Γ_R er πR, gir ML-ulikheten

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{1}{R^3-1}\cdot\pi R \qquad \text{og følgelig er} \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Siden $z = x$, $dz = dx$ på intervallene $[-R, -1-r]$ og $[-1+r, R]$ får vi

$$\int_{-R}^{-1-r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz + \int_{-1+r}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \oint_{C_{R,r}} f(z)\,dz.$$

Vi lar $r \to 0$ og $R \to \infty$ og bruker svarene ovenfor.

$$\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi ix}}{x^3+1}\,dx + \frac{\pi i}{3} = \frac{\pi}{3}e^{-\pi\sqrt{3}/2}(1+i\sqrt{3})$$

Ved å ta imaginærdelen på begge sider får vi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi x}{x^3+1}\,dx = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{3}e^{-\pi\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}e^{-\pi\sqrt{3}/2} - 1\right) \quad (\approx -0.9278).$$

(At integralet er konvergent følger av at $\sin(\pi x)/(x^3+1)$ har endelig grenseverdi når $x \to -1$ og $|\sin(\pi x)/(x^3+1)| \le 1/(x^2+1)$ når $|x| \to \infty$.)