Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontaktperson:
Sverre O. Smalø
735 – 91750

MIDTSEMESTERPRØVE I FAG TMA4140/MA0302 DISKRET MATEMATIKK

Onsdag 19. oktober 2005
Tid : 10.15-11.45

Tillatte hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator (HP30S);
Rottmann: Matematisk formelsamling.

INSTRUKSJONER

1) Oppgavesettet skal ikke åpnes før dere får beskjed om det.

2) Oppgavesettet har 8 oppgaver. Det er 6 flervalgsoppgaver der ett eller flere av svaralternativene er riktige. Det er to enkeltoppgaver som krever begrunnelser.

3) Svarene på flervalgsoppgavene gis ved at riktig(e) alternativ krysses av på eget ark som du finner bakerst i oppgavesettet, mens svarene på de to enkeltoppgavene leveres på separate ark som dere får av eksamensvaktene.

4) Hvert riktig svar på en flervalgsoppgave gir ett poeng, mens hvert galt svar gir ett poeng i trekk. Flervalgsoppgavene teller 75% av settet, mens de to enkeltoppgavene teller 25%.

5) Du skal levere svararket på flervalgsoppgave sammen med oppgavesettet. Pass på at studentnummeret ditt er skrevet på alle ark som leveres inn.

1. Hvilke av utsagnene under er ekvivalent med utsagnet $(p \to (\neg q)) \wedge r$, der p, q og r er utsagn?

   a) $\neg((p \wedge q) \vee (\neg r))$
   b) $(p \wedge \neg q) \vee r$
   c) $((\neg p) \wedge r) \vee ((\neg q) \wedge r)$
   d) $((\neg p) \wedge (\neg q)) \to r$

   Riktige svar: a) og c).

2. La M være en endelig ikketom mengde med m elementer og N en endelig ikketom mengde med n elementer. Hvilke av påstandene under er korrekte?

   a) Antall elementer i $M \times N$ er $m + n$
   b) Antall funksjoner fra M til N er n^m
   c) Antall funksjoner fra M til N som er injektive er større enn eller lik $m!$ dersom $n \geq m$
   d) Antall funksjoner fra M til N som er surjektive er større enn eller lik $n!$ dersom $m \geq n$.

   Riktige svar: b), c) og d).

3. La $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved $f(n) = n^4 + 19n^3 + 4^n + 17n^n$. Hvilke av påstandene under er korrekte?

   a) $f(x)$ er $O(4^n)$
   b) $f(x)$ er $O((n!)^2)$
   c) $f(x)$ er $\Omega(2^n)$
   d) $f(x)$ er $\Omega(n!)$

   Riktige svar: b), c) og d).

4. Hvilke av tallene nedenfor er løsning til følgende systemet av lineære kongruenser?
   $x \equiv 7(\mod 9)$
   $x \equiv 23(\mod 25)$
   $x \equiv 47(\mod 49)$

   a) 11023
   b) 7448
   c) 2555
   d) -11027

Riktige svar: a) og d).

5. Hvilke av tallene nedenfor er kongruente med 2^{2^9} modulo 19?

a) 1
b) 4
c) 9
d) 16

Riktig svar: c)

6. La skriftegnene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E$ og F representere tallene mellom 0 og 15 i det hexadesimale tallsystemet. Hvilke av tallene i desimalsystemet, det oktale tallsystemet, 4-tallsystemet og det binære tallsystemet representerer tallet $(3BCD5)_{16}$

a) $(244949)_{10}$
b) $(527012)_8$
c) $(222320023)_4$
d) $(111011110011010101)_2$

Riktige svar: a) og d).

7. Vis ved hjelp av induksjon at
$$\sum_{i=1}^{2^n-1} 1/i \leq n$$
for all n.

LØSNING: $\sum_{i=1}^{2^n-1} 1/i = 1 + 1/2 + ... + 1/(2^n - 1)$. Vi må sjekke at påstanden holder for $n = 1$. Dvs. $\sum_{i=1}^{2^1-1} 1/i. \leq 1$. Høyre side av dene ulikheten er 1 så ulikheten holder for $n = 1$.

La oss nå anta at påstanden holder for en $k \geq 1$, og vi vil vise at den da også holder for $k + 1$. Vi ser da på

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} 1/i = 1 + 1/2 + ... + 1/(2^k - 1) + 1/2^k + ... + 1/(2^{k+1} - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{2^k-1} 1/i + 1/2^k + 1/(2^k + 1) + 1/(2^k + 2) + ... + 1/(2^k + 2^k).$$

Nå vil den siste delen av summen i uttrykket over ha 2^k ledd og hvert ledd er mindre enn eller likt det første leddet som er $1/2^k$. Vi får derfor at summen av de siste leddene er mindre enn $2^k/2^k = 1$. Ved å bruke induksjonsantagelsen får vi da

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}-1} 1/i \leq \sum_{i=1}^{2^k-1} 1/i + 1 \leq k + 1$$

der induksjonsantagelsen brukes i den andre ulikheten. Dette beviser at induksjonssteget holder. Ved induksjon følger nå påstanden.

8. Bruk Euclids algoritme til å finne inversen til 13 modulo 47.

Riktig svar: -18 eller et av tallene -18+k*47

Studentnummer:

Kode: abdef

oppgave	a)	b)	c)	d)
1				
2				
3				
4				
5				
6				