Norges teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4115
Matematikk 3
Vår 2012

Løysingsforslag – Øving 12

Oppgaver fra læreboka kap. 5.1, s. 272

$\boxed{18}$ Vi finner egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi observerer at A har en nullrad, dvs at 0 er en egenverdi. Vi ser videre at $A - 5I$ og $A - 3I$ har nullrader. Altså er egenverdiene 0, 3 og 5. Dette kunne vi også sett ved å lese av diagonalelementene siden A er triangulær.

$\boxed{21}$ **a** Usant. Vi krever i tillegg $\mathbf{x} \neq 0$.
b Sant. Dersom 0 er en egenverdi er det $A = 0$ og A er ikke inverterbar. Dersom 0 ikke er en egenverdi er det $A \neq 0$ og A er inverterbar.
c Sant. Dersom ligninga har en ikke-triviell løsning $\mathbf{x}$ er $\mathbf{x}$ en egenvektor og c en egenverdi. Dersom ligninga kun har triviell løsning så finnes ingen $\mathbf{x} \neq 0$ slik at $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$.
d Sant. Vi regner ut $A\mathbf{x}$ og sjekker om det er en skalar ganger $\mathbf{x}$.
e Usant. Først må man finne en egenverdi λ, deretter radreduserer man $A - \lambda I$.

Oppgaver fra læreboka kap. 5.2, s. 280

$\boxed{12}$ Det karakteristiske polynomet er

$$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 \cdot 3 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 4.$$

$\boxed{27}$ Vi har matrisa A og vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{w}$.
a Vi regner $A\mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 0{,}5 \cdot \mathbf{v}_2$ og $A\mathbf{v}_3 = 0{,}2 \cdot \mathbf{v}_3$.
b Vi har da tre distinkte egenverdier. Teorem 2 side 270 forteller at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige siden egenverdiene som korresponderer til egenvektorene er distinkte. Siden vi befinner oss i $\mathbb{R}^3$ vil vektorene også utspenne rommet og det finnes c_1, c_2, c_3 slik at $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$. Videre får vi at $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{w}^T\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{w}^T\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{w}^T\mathbf{v}_3 = c_1$. På den annen side har vi at $\mathbf{w}^T\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{3}(x_0)_i = 1$ som gir $c_1 = 1$.
c Siden $\mathbf{v}_i$ er egenvektorer og $\mathbf{x}_0$ en sannsynlighetsvektor får vi

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 = A^k(\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + c_2 * (0{,}5)^k\mathbf{v}_2 + c_3(-0{,}2)^k\mathbf{v}_3.$$

Når vi så lar $k \to \infty$ vil $\mathbf{x}_k \to \mathbf{v}_1$.

Oppgaver fra læreboka kap. 5.3, s. 287

15 Først finner vi egenrommet til egenverdien 0. Vi radreduserer $A-0I=A$ og finner at egenrommet er $\{c\mathbf{v}|c\in\mathbb{R},\mathbf{v}=(1,-1,1)\}$. Egenrommet til egenverdien 1 er nullrommet til $A-1I$ som er $\{c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2|c_1,c_2\in\mathbb{R},\mathbf{v}_1=(-1,1,0),\mathbf{v}_2=(1,0,-1)\}$. Siden $\{(1,-1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)\}$ er lineært uavhengige kan matrisa diagonaliseres og vi har diagonaliseringa

$$\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&2&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}=P^{-1}DP=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

Legg merke til at kolonnene i P er egenvektorer som svarer til egenverdien på diagonalen (dvs kolonne 2 svarer til diagonalelement 2 osv).

25 Vi anvender teorem 7 side 285. Siden et egenrom per definisjon har dimensjon større enn eller lik 1 vil den siste egenverdien gi et egenrom med dimensjon 1. Da vil summen av dimensjonen av egenrommene bli 4, og del **b** av teoremet er tilfredsstilt, noe som betyr at A er diagonaliserbar.

Oppgaver fra læreboka kap. 5.5, s. 300

3 Det karakteristiske polynomet er $\lambda^2-6\lambda+13$ med røtter $\lambda=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 13}}{2}=3\pm 2i$. Vi finner egenvektorene på vanlig måte som gir $\mathbf{v}=(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}i,-1)$.

Oppgaver fra læreboka kap. 5.7, s. 318

7 Vi diagonaliserer $A=\begin{bmatrix}7&-1//3&3\end{bmatrix}$. Egenverdiene er gitt ved den karakteristiske ligninga $\lambda^2-10\lambda+24=0$ som har løsninger $\lambda_1=6$ og $\lambda_2=4$. Vi regner tilhørende egenvektorer $(A-6I)\mathbf{v}_1=0$ og $(A-4I)\mathbf{v}_2=0$. Dette gir $\mathbf{v}_1=(1,1)$ og $\mathbf{v}_2=(1,3)$. Vi lar nå $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$ som gir $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1\\-1&1\end{bmatrix}$. Da er $A=P^{-1}\begin{bmatrix}6&0\\0&4\end{bmatrix}P$. Og vi får $\mathbf{x}=P^{-1}P\mathbf{x}=P^{-1}\mathbf{y}$, $\mathbf{x}'=P^{-1}\mathbf{y}'$ og dermed

$$\mathbf{y}'=P\mathbf{x}'=PA\mathbf{x}=PP^{-1}DP\mathbf{x}=D\mathbf{y}.$$

Oppgaver fra læreboka kap. 6.1, s.336-337

1

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}&=(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2=5,\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}&=4\cdot(-1)+6\cdot 2=8,\\ \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}&=\frac{8}{5}.\end{aligned}$$

28 Alle $\mathbf{w}\in\text{Span}\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ kan skrives på formen $\mathbf{w}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}$ (definisjonen av Span). At to vektorer er ortogonale betyr at indreproduktet er 0. Vi regner $\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}$ og bruker egenskap **b** og **c** i Teorem 1 side 331

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{y}\cdot(c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v})=c_1\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}+c_2\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}=0.$$

Oppgaver fra læreboka kap. 6.2, s. 344-345

$\boxed{1}$ Vi lar $\mathbf{v}_1 = (-1,4,-3), \mathbf{v}_2 = (5,2,1)$ og $\mathbf{v}_3 = (3,-4,-7)$ og regner ut de ulike indreproduktene

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= -1 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 = 0,\\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= -1 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-7) = 2,\\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-7) = 0.\end{aligned}$$

Vi har da at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ og $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er ortogonale mengder, men man kan ikke ha $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$ i samme mengde siden indreproduktet er forskjellig fra 0.

$\boxed{13}$ Vi prøver å skrive $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ slik at $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ og $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$. Vi tar indreproduktet $\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}$ og får at

$$\begin{aligned}\mathbf{y} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}\\ &= c\mathbf{u} \cdot \mathbf{u},\end{aligned}$$

noe som gir $c = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \frac{-13}{65} = -\frac{1}{5}$. Vi prøver oss da med

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\-7\end{bmatrix},\\ \mathbf{w} = \mathbf{y} - \mathbf{v} &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}14\\8\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Vi ser at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Oppgaver fra læreboka kap. 6.3, s. 352

$\boxed{3}$ $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$, altså er $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ en ortogonal mengde. Projeksjonen av $\mathbf{y}$ på denne mengda blir

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{-1 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{1^2 + 1^2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{(-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 1}{(-1)^2 + 1^2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\4\\0\end{bmatrix}.$$

$\boxed{14}$ Den beste approksimasjonen er projeksjonen ned i Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Vi ser at $\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, så da har vi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} &= \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|^2}\\ &= \frac{7}{14}\mathbf{v}_1\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{v}_1.\end{aligned}$$