SIF5015 Diskret matematikk
Mandag 5. august 2002
løsningsforslag

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ **a)** Dersom vi nummererer valuasjonene fra 0 til 15, ser vi av sannhetstabbellen at utsagnet A er sant for valuasjonene 0,1,2,3,4,6,8,9,12,13.

A	$\neg$	$(p$	$\to$	$r)$	$\to$	$((p$	$\vee$	$s)$	$\to$	$\neg$	$(p$	$\vee$	$q))$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
5	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1
6	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
7	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
8	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
9	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
10	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
11	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
13	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1
14	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1
15	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1

Utsagnet B er sant for valuasjonene 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13, og er derfor svakere enn utsagnet A, eller med andre ord, $A \Rightarrow B$.

b) Karnaughdiagrammet under viser at $A \Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg s)$.

	$\bar{p}\bar{q}$	$\bar{p}q$	pq	$p\bar{q}$
$\bar{r}\bar{s}$	1	1	1	1
$\bar{r}s$	1	0	1	1
rs	1	0	0	0
$r\bar{s}$	1	1	0	0

$\boxed{2}$ **a)** Vi benytter Euklids algoritme:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 17204 & = & 1111 & \cdot & 15 & + & 539 \\ 1111 & = & 539 & \cdot & 2 & + & 33 \\ 539 & = & 33 & \cdot & 16 & + & 11 \\ 33 & = & 11 & \cdot & 3 & + & 0 \end{array}$$

Ut fra dette kan vi lese at $\gcd(17204, 1111) = 11$.

b) De første potensene av 4 **mod** 11 er

1, 4, 5, 9, 3, 1, ... Dette betyr at dersom $n \equiv 0 \pmod 5$, så er $4^n \equiv 1 \pmod{11}$. Siden $5|10^{50}$ er $4^{(10^{50})} \mathbf{mod}\ 11 = 1$.

c) De første potensene av 4 **mod** 13 er

1, 4, 3, 12, 9, 10, 1, ... Dette betyr at dersom $n \equiv 0 \pmod 6$, så er $4^n \equiv 1 \pmod{13}$.

Vi ser så på potensene av 10 **mod** 6. Vi har at $4 \cdot 4 \equiv 4 \pmod 6$, altså er

$10^{50} \equiv 4 \pmod 6$, så $4^{(10^{50})} \mathbf{mod}\ 13 = 4^4 \mathbf{mod}\ 13 = 9$.

d) Sett $m = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 220$. Vi har

$$\begin{aligned} \frac{m}{4} &= 55 \equiv 3 \pmod 4 \\ \frac{m}{5} &= 44 \equiv 4 \pmod 5 \\ \frac{m}{11} &= 20 \equiv 9 \pmod{11} \end{aligned}$$

Fordi $4 \cdot 3 \equiv 2 \pmod 5$, og $9 \cdot 9 \equiv 4 \pmod{11}$ er $x \equiv 55 + 3 \cdot 44 + 9 \cdot 20 \equiv 367 \pmod{220}$. Siden det er en og kun en løsning $0 \le x \le 219$ er $x = 147$ den minste positive løsningen.

$\boxed{3}$ **a)** Antall slike strenger er

$$C(10,4) = C(10,6) = \binom{10}{4} = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210.$$

b) Antall slike strenger er $\dfrac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 5!} = \binom{10}{5}\binom{5}{2} = 2520.$

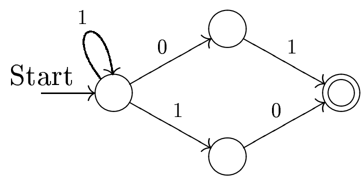
$\boxed{4}$ Ligningen er av andre orden og den er lineær, homogen, og med konstante koeffisienter. Det assosierte karakteristiske polynomet er $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}$. Røttene er 1 og $-\frac{1}{2}$, så den generelle løsningen er $a_n = A + B(-\frac{1}{2})^n$.

For at initialbetingelsene skal være oppfylt får vi to ligninger for A og B.

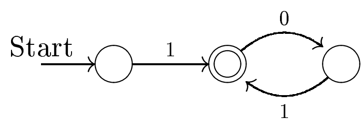
$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - \frac{1}{2}B &= 3 \end{aligned}$$

Dette gir $A = \frac{7}{3}$, $B = -\frac{4}{3}$, og $a_n = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n$.

$\boxed{5}$ En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket $1^*(01 \cup 10)$ er f.eks.

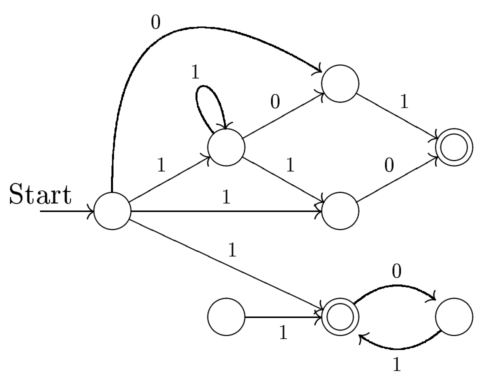


En automat med språket gitt ved det regulære uttrykket $1(01)^*$ er f.eks.



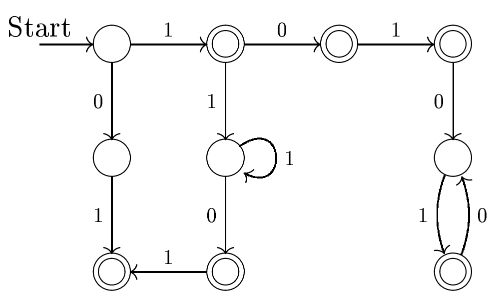
En automat med språket representert ved unionen $1^*(01 \cup 10) \cup 1(01)^*$, er f.eks.

a)



En deterministisk automat med samme språk, er f.eks.

b)



For all enkelhetsskyld har vi droppet den ikkeaksepterende universelt tiltrekkende tilstanden $\emptyset$.

$\boxed{6}$ **a)** Vi starter med å regne ut $2^n \,\mathbf{mod}\, 80$, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Resultatet ser vi i tabellen under.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$f(n)$	1	2	4	8	16	32	64	48	16	32	$\cdots$

Siden vi kommer tilbake igjen til 16 etter 4 skritt, må vi ha at funksjonen f er periodisk med periode 4 for $n \geq 4$.

Vi regner så ut $3^n \,\mathbf{mod}\ 80$, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
$g(n)$	1	3	9	27	1	3	9	27	1	3	$\cdots$

Funksjonen g er altså periodisk med periode 4, og $g(n)$ antar kun verdiene 1, 3, 9 og 27.

b) For $m \geq 4$ vil $f(n)$ kun anta verdiene 16, 32, 48 og 64, og derfor kan

$(f(m) - g(n))\,\mathbf{mod}\ 80$ kun anta verdiene

15, 31, 47, 63, 13, 29, 45, 61, 7, 23, 39, 55, 69, 5, 21, 37.

Likeledes vil $(g(n) - f(m))\,\mathbf{mod}\ 80$ kun anta verdiene

65, 67, 73, 11, 49, 51, 57, 75, 33, 35, 41, 59, 17, 19, 25, 43.

Følgelig må $|f(m) - g(n)| \geq 5$ for alle tallpar (m, n) med $m \geq 4$.

$\boxed{7}$ I denne oppgaven har vi 9 atomære utsagn. De er "Kongsgården ligger i østlig retning", "Kongsgården ligger i vestlig retning", ..., "Det er Røvere i vest". Vi forkorter disse utsagnene som vist i tabellen under:

	øst	sør	vest
kongsgård	p_1	p_2	p_3
kvikksand	q_1	q_2	q_3
røvere	r_1	r_2	r_3

Av alle de 2^9 sannhetstilordningene, har askeladden fått vite at det er kun 6 mulige, nemlig de i tabellen under:

p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	r_1	r_2	r_3
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0

og at alle de $2^9 - 6$ andre er umulige.

Utsagnene til de tre mennene kan formaliseres som følger:

Den første mannen sa: $\neg p_3$.

Den andre mannen sa: $\neg q_2 \to r_3 \Leftrightarrow q_2 \vee r_3$.

Den tredje mannen sa: $\neg r_1 \to p_2 \Leftrightarrow r_1 \vee p_2$.

Vi lager en sannhetstabell for disse tre utsagnene med de 6 mulige valuasjonene (modellene).

p_1	p_2	p_3	q_1	q_2	q_3	r_1	r_2	r_3	$\neg p_3$	$q_2 \vee r_3$	$r_1 \vee p_2$
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1

Herav ser vi at det er kun i tilfellet at $p_1 \wedge q_3 \wedge r_2$ er sann at det er kun en av mennene som snakker sant. Altså ligger kongsgården i østlig retning, og det er den første mannen som snakker sant.