Oppgave 1 Matrisen er inverterbar hvis og bare hvis dens determinant er forskjellig fra 0. Ved å utvikle determinanten langs første rad, finner vi at

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2a & -4 \\ a & 1 & -a \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2a & -4 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ a & -a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 4(1-a^2),$$

som er forskjellig fra 0 nøyaktig når $a \neq \pm 1$.

Oppgave 2 Observér først at $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ og $\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ ved å oversette mellom kartesisk form og polar form. Det betyr at

$$\left(\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\right)^4 = 16\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -16,$$

og dermed

$$z = \mathrm{i}^{-16} - 3\mathrm{i} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\right)^{-16} - 3\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-8\pi\mathrm{i}} - 3\mathrm{i} = 1 - 3\mathrm{i}.$$

Vi leser av fra dette at $\operatorname{Re} z = 1$ og $\operatorname{Im} z = -3$.

Oppgave 3 • Elementære radoperasjoner gir at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

hvor det er pivotelementer i de to første kolonnene i den radreduserte matrisen. Det betyr at de tilsvarende kolonnene i A danner en basis for kolonnerommet til A—med andre ord,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

utgjør en basis for $\operatorname{Col} A$. En basis for $\operatorname{Null} A$ finner vi ved å løse $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, og fra den radreduserte matrisen finner vi at generell løsning blir

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} t,$$

hvor t er en fri parameter (tredje variabel). En basis for $\operatorname{Null} A$ er derfor $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

• Siden kolonnerommet til A ikke er maksimalt, altså at $\dim \operatorname{Col} A = 2 < 3$, vil det finnes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ slik at $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ikke har løsning. Hvis systemet har løsning for en spesifikk $\boldsymbol{b}$ (som da må ligge i $\operatorname{Col} A$), vil det automatisk eksistere uendelig mange løsninger, fordi det er uendelig mange løsninger til det homogene systemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (siden $\operatorname{Null} A$ er ikke-trivielt) og enhver løsning av $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ kan skrives som en sum av en partikulærløsning av det inhomogene systemet og løsningene til det homogene systemet.

Oppgave 4 Karakteristisk ligning $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ for den homogene versjonen av differensialligningen har løsninger $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{2}$. Det betyr at generell løsning på den homogene ligningen blir

$$y_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^t\Big(A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)\Big)$$

for konstanter $A, B \in \mathbb{R}$.

For å finne partikulærløsningen, kan vi bruke ubestemte koeffisienters metode. Siden høyresiden $9t$ ikke opptrer i y_{h}, blir naturlig gjetning da

$$y_{\mathrm{p}}(t) = Ct + D$$

for $C, D \in \mathbb{R}$ som må bestemmes. Innsetting av y_{p} i differensialligningen gir at $C = 3$ og $D = 2$ og dermed generell løsning

$$y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{e}^t\Big(A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)\Big) + 3t + 2.$$

Vi merker oss at

$$y'(t) = \mathrm{e}^t\Big[(A + \sqrt{2}B)\cos(\sqrt{2}t) + (B - \sqrt{2}A)\sin(\sqrt{2}t)\Big] + 3.$$

Initialverdibetingelsene gir så at

$$-1 = y(0) = A + 2 \qquad \Rightarrow \qquad A = -3$$

og

$$\sqrt{2} = y'(0) = A + \sqrt{2}B + 3 \qquad \Rightarrow \qquad B = 1.$$

Dermed blir løsningen

$$y(t) = \mathrm{e}^t\Big(\sin(\sqrt{2}t) - 3\cos(\sqrt{2}t)\Big) + 3t + 2.$$

Oppgave 5 Vektorene er lineært uavhengige hvis og bare hvis de eneste skalarene c_1, c_2 og c_3 som tilfredsstiller

$$c_1(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + c_2(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) + c_3(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0},$$

er $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

For å se dette, omrokkerer vi først vektorligningen til

$$(c_1+c_2)\boldsymbol{u} + (c_1+c_3)\boldsymbol{v} + (c_2+c_3)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}.$$

Siden $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{w}$ er lineært uavhengige, må

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{og} \qquad c_2 + c_3 = 0,$$

eller på matriseform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som har $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ som eneste løsning, hvilket var det vi skulle vise.

Oppgave 6 • Siden $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$, må vi konstruere en ortogonal basis for V. Gram–Schmidts metode gir en ortogonal basis $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, hvor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• La $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Projeksjonen blir så

$$P_V(\boldsymbol{b}) = P_{\boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{b}) + P_{\boldsymbol{v}_2}(\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7

a) • Egenverdiene til A er røttene til det karakteristiske polynomet

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(-1-\lambda).$$

Det betyr at -1, 0 og 1 er egenverdiene til A.

• For å regne ut A^{31} er det lurt å først diagonalisere A på formen PDP^{-1}, hvor

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og P er en 3×3-matrise som har som kolonner egenvektorer tilhørende egenverdiene til A (i samme rekkefølge som diagonalen til D). Da blir

$$A^{31} = PD^{31}P^{-1},$$

og siden

$$D^{31} = \begin{bmatrix} (-1)^{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D,$$

finner vi at $A^{31} = PDP^{-1} = A$—faktisk uten å måtte regne ut P spesifikt (men hvis man har gjort det, blir det mindre arbeid i neste deloppgave).

b) • Generell løsning på differensialligningssystemet er

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{v}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2\boldsymbol{v}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + c_3\boldsymbol{v}_3\mathrm{e}^{\lambda_3 t},$$

hvor λ_i er egenverdiene til A med tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{v}_i$ og c_i er vilkårlige konstanter. Vi finner først en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_1 = -1$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(det vil si, $\mathrm{Null}(A-\lambda_1 I) = \mathrm{Sp}\{\boldsymbol{v}_1\}$). Tilsvarende finner vi at $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende egenverdien $\lambda_2 = 0$ og at $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor tilhørende $\lambda_3 = 1$. Det gir generell løsning

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{t},$$

og fra

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

finner vi at $c_1 = 3$, $c_2 = 4$ og $c_3 = 0$. Med andre ord,

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Siden $\mathrm{e}^{-t} \to 0$ når $t \to \infty$, konkluderer vi med $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Oppgave 8 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Fra tabellen må koeffisientene til p tilfredsstille systemet

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Minste kvadraters-løsningen består da i å løse $A^\top A\boldsymbol{x} = A^\top \boldsymbol{b}$, med andre ord løse

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 21 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Gausseliminasjon gir at entydig løsning er $\boldsymbol{x} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 20 \\ -6 \\ -17 \end{bmatrix}$, hvilket betyr at

$$a = 2, \qquad b = -3/5 \qquad \text{og} \qquad c = -17/10$$

er de beste koeffisientene.

Oppgave 9 • La $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ være en generell matrise i $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Da er $A \in \mathcal{S}_2$ hvis og bare hvis $A^\top = A$—det vil si, $\mathcal{S}_2$ utgjør de symmetriske 2×2-matrisene. Siden $A^\top = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, må $b = c$, slik at en generell matrise i $\mathcal{S}_2$ er på formen $\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$. Vi kan dekomponere alle matrisene i S_2 som

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

og dermed utgjør

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

en basis for $\mathcal{S}_2$ hvis vi kan vise lineær uavhengighet—men dette holder umiddelbart siden de tre matrisene ikke har noen felles koeffisienter forskjellig fra 0.

• $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}$, slik at $\dim \mathcal{S}_1 = 1$. For $n \geqslant 2$ består $\mathcal{S}_n$ av alle symmetriske $n \times n$-matriser $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, hvor koeffisientene tilfredsstiller

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n.$$

La $E_{k,\ell}$ for alle $1 \leqslant k, \ell \leqslant n$ utgjøre $n \times n$-matrisen med koeffisient lik 1 i posisjonene (k, ℓ) og (ℓ, k) og koeffisienter lik 0 ellers. Tilsvarende som i 2×2-tilfellet kan da A entydig dekomponeres som

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} E_{i,j},$$

hvor $\{E_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ utgjør en basis for $\mathcal{S}_n$. Dimensjonen til $\mathcal{S}_n$ er det samme som antall basismatriser, hvilket totalt blir

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$