Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4115
Matematikk 3
Vår 2012

Løysingsforslag – Øving 5

Oppgaver fra læreboka s. 21-22

3 Vi radreduserer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Først multipliserer vi 2.rad med $\frac{1}{2}$ og 3. rad med $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

for så å legge -1 ganger 2. rad til 3. rad

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi legger -1 ganger 2. rad til 1. rad

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

før vi avslutter med å legge -3 ganger 1. rad til 2. rad og bytter om på 1. og 2. rad

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at 1. og 3. kolonne er ledende kolonner (pivot columns) og at i den originale matrisa er de ledende elementene (pivot elements) $(2, 1)$ og $(1, 3)$. I den reduserte echelonmatrisa er de ledende elementene $(1, 1)$ og $(2, 3)$.

11 Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løysinga har to frie variablar s og t:

$$x_1 = \frac{2}{3}s - \frac{4}{3}t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = t.$$

13 Vi legger 3 ganger 2. rad til 1. rad og 3. rad til 1. rad og får redusert echelonmatrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette gir ved tilbakesetting

$$\begin{aligned} x_5 &= t, \\ x_4 &= 4 - 9t, \\ x_3 &= s, \\ x_2 &= 1 + 4t, \\ x_1 &= 5 + 3t. \end{aligned}$$

19 Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix},$$

med echelonform

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8 - 4h & k - 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Ingen løsning

Teorem 2 s. 21 sier at vi må ha at 3. kolonne er en ledende kolonne for at systemet ikke skal ha løsning. Det betyr at $8 - 4h = 0$ og $k - 8 \neq 0$, altså $h = 2$, $k \neq 8$.

(b) En unik løsning

Fra teorem 2 s. 21 har vi at 1. og 2. kolonne må være ledende kolonner. Det vil si at $8 - 4h \neq 0$, eller $h \neq 2$.

(c) Uendelig mange løsinger

Vi trenger at verken 2. eller 3. kolonne er ledende kolonner, altså $h = 2$ og $k = 8$.

Oppgaver fra læreboka, s. 32-33

5 Vektorlikninga er ekvivalent med

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -2x_1 &= -3 \\ 8x_1 - 9x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$\boxed{9}$ Systemet er ekvivalent med vektorlikninga

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{11}$ NB! Feil i fasit. $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av vektorene $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ hvis og bare hvis likningssystemet med utvida matrise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

har løsning. Vi setter opp matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

og radreduserer til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og vi ser at systemet har løsning $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$.

$\boxed{17}$ Vi har at $\mathbf{v}$ er i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ hvis og bare hvis det finnes to reelle tall a og b slik at $\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Fem vektorer i $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ kan være

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u} = 0\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w} = 1\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \pi\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3\pi + 4 \\ \pi \\ 2\pi - 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{19}$ Vi ser på $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ geometrisk. Siden $\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ vil $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = (\frac{3}{2}a + b)\mathbf{v}_2\}$ som er en rett linje i rommet.

Oppgave fra eksamen desember 2011

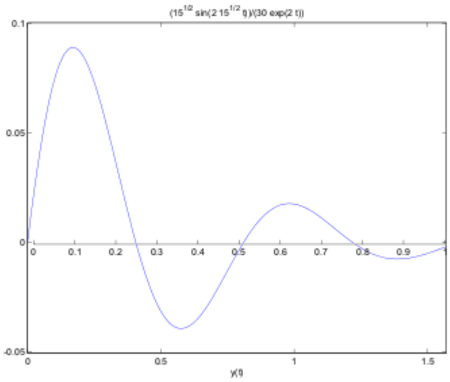
Oppgave 2 En dempet tvungen svingning er beskrevet ved differensialligningen

$$y''(t) + 4y'(t) + 64y(t) = \cos \omega t.$$

a) Bestem om bevegelsen er underdempet, overdempet eller om det er kritisk demping. Skisser (uten utregning) en løsning til den homogene ligningen med initialbetingelser $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + 4\lambda + 64 = 0$ og røtene $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 64}$ er komplekse. Bevegelsen er underdempet.

Løsningen til den homogene ligningen med initialbetingelser $y(0) = 0, y'(0) = 1$ er på formen $y(t) = ce^{-2t} \sin \omega t$ den går mot 0 og ser sån ut



b) Vis at $y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ er en partikulær løsning av ligningen når

$$A = \frac{64 - \omega^2}{(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}, \quad B = \frac{4\omega}{(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}.$$

Vi ser etter en partikulær løsning på formen $y_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Setter inn i ligningen og får

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t - 4A\omega \sin \omega t + 4B\omega \cos \omega t + 64A \cos \omega t + 64B \sin \omega t = \cos \omega t.$$

Dette gir $(64 - \omega^2)A + 4\omega B = 1$ og $(64 - \omega^2)B - 4\omega A = 0$. Vi løser systemet og får A og B som oppgitt.

c) Sett $C = \max y_p(t)$. For hvilken verdi av ω blir C størst? (Du kan bruke uten bevis at $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.)

Fra b) har vi

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{1}{\sqrt{(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}.$$

Den blir størst når $(64 - \omega^2)^2 + 16\omega^2 = 64^2 - 112\omega^2 + \omega^4$ blir minst. Vi har $64^2 - 112\omega^2 + \omega^4 = (\omega^2 - 56)^2 + 64^2 - 56^2$, dette blir minst når $\omega = \pm\sqrt{56}$.