Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Haaken A. Moe
92650655

Bokmål

EKSAMEN I TMA4140 Diskret Matematikk

17. desember 2007
Tid: 09.00 – 13.00
Sensur 17. januar 2008

Hjelpemidler:
Enkel kalkulator HP30S,
Rottmanns matematiske formelsamling.

Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1 (10%) Benytt matematisk induksjon til å vise at

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

for alle heltall $n \geq 1$.

Oppgave 2 Ekvivalensrelasjoner og partisjoner.

a) (5%) Skriv ned definisjonen på at en relasjon er transitiv og definisjonen på en ekvivalens-relasjon (equivalence relation).

b) (5%) Mengden $S = \{a, b, d, e, f, g, h\}$ er gitt en partisjon (partition) $U = \{U_1, U_2, U_3\}$, hvor $U_1 = \{a, f\}, U_2 = \{b, d, e\}$ og $U_3 = \{g, h\}$. Denne partisjonen av S gir en bestemt ekvivalensrelasjon $\mathcal{R}_U$ på S. Skriv opp denne ekvivalensrelasjonen som en mengde av ordnede par.

Oppgave 3 (10%) Finn alle heltall x som løser

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{5} \\ x &\equiv 2 \pmod{3} \\ x &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

Oppgave 4 (10%) Et *palindrom* er en streng som er lik om den leses forlengs eller baklengs, f.eks 'anna'. Bruk pseudokode til å beskrive en algoritme/metode som skal sjekke om strenger er palindromer. Gå ut fra at algoritmen bare skal undersøke strenger av en bestemt lengde n.

Kan du ikke pseudokode så anvend presis og *kortfattet* vanlig norsk/engelsk til å beskrive framgangsmåten for redusert uttelling på oppgaven.

Oppgave 5 (10%) Bruk ordnede par til å beskrive *alle* mulige relasjoner på $S = \{0, 1\}$.

Oppgave 6 (10%) Uttrykk i prefix og postfix notasjon. Tegnet $\uparrow$ betyr opphøyd i, dvs $4^5 = 4 \uparrow 5$, * means multiplikasjon.

a) Regn ut disse uttrykkene som er skrevet i prefix notasjon:

i) $\uparrow - * 3\ 3 * 4\ 2\ 5$ **ii)** $+ - \uparrow 3\ 2 \uparrow 2\ 3\ /\ 6 - 4\ 2$

b) Regn ut disse uttrykkene som er skrevet i postfix notasjon:

i) $5\ 2\ 1 - -3\ 1\ 4 + + *$ **ii)** $9\ 3\ /\ 5 + 7\ 2 -\ *$

Oppgave 7 (10%) Vis at følgende likhet holder:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

Oppgave 8 (10%) Karakteristiske funksjoner. La S være en mengde fra et univers $\mathcal{U}$. Den *karakteristiske funksjonen* $f_S : \mathcal{U} \to \{0, 1\}$ til S er den funksjonen fra $\mathcal{U}$ til $\{0, 1\}$ slik at $f_S(u) = 0$ om $u \notin S$ og $f_S(u) = 1$ om $u \in S$. La A og B være to mengder fra $\mathcal{U}$. Vis at for alle $x \in \mathcal{U}$ så er

i) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ **ii)** $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$
iii) $f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$

Oppgave 9 (10%) Endelig tilstandsautomat. Lag en deterministisk eller ikke-deterministisk endelig tilstandsautomat som aksepterer (recognizes) følgende språk.

$$\{11\}^* \cup \{000, 001\}^*$$

Beskriv automaten med enten et tilstandsdiagram (tegning) eller en tilstandstabell.

Oppgave 10 (10%) Boolsk algebra. **NOR**-operatoren, $\downarrow$, er definert ved at $1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0$ og $0 \downarrow 0 = 1$. Vis at denne er funksjonelt komplett (functionally complete), dvs at $\downarrow$ kan brukes til å representere alle boolske funksjoner. Hint: Vi vet fra før at $\{+, \cdot, \overline{}\}$ er funksjonelt komplett.