Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Gereon Quick[a], Morten Solberg[b]

Tlf: [a] 485 01 412 , [b] 980 52 556

Eksamensdato: 1. desember 2021

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:
Eksamen består av ti deloppgaver. Alle deloppgaver teller likt. Alle svar skal begrunnes. I år spesifiserer vi at INGEN trykte eller håndskrevne hjelpemidler er tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle røttene til $p(z) = z^4 + 16$ og skisser de i det komplekse plan. Faktorisér $p(z)$ i lineære faktorer.

Oppgave 2 Se på de tre punktene

$$(0, -3), (1, -1) \text{ og } (2, 5)$$

i $\mathbb{R}^2$.
Finn andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som går gjennom alle disse punktene og finn ved hjelp av minste kvadraters metode førstegradspolynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til de tre punktene.

Oppgave 3 La A være 3×3-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a-1 & 4 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 6 & a+1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn alle reelle tall a slik at $\det A \neq 0$. Bestem dimensjonen til $\operatorname{Col} A$ (kolonnerommet til A) for alle verdier av a.

b) Avhengig av a, finn alle reelle tall b slik at systemet

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ b \\ 8 \end{bmatrix}$$

har en løsning.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) Gi en geometrisk beskrivelse av hva denne lineærtransformasjonen gjør og regn ut A^{2021}.

b) Finn egenverdiene til A og gi en geometrisk tolkning av at de ikke er reelle.

Oppgave 5 La $V = \mathcal{C}[0,1]$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, og betrakt underrommet $U = \mathrm{Sp}\{1, x\}$. La $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Dette er et indreprodukt for $V = \mathcal{C}[0,1]$.

a) Finn en ortogonal basis for U.

b) La $h(x) = e^x$. Finn $\mathrm{Proj}_U(h(x))$.
Hint: $((x-1)e^x)' = xe^x$.

Oppgave 6 Finn en reell 2×2-matrise A som hører til systemet av differensialligninger $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ med løsninger

$$e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \text{ og } e^{2t}\left(\begin{bmatrix}t\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Oppgave 7

La

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 2 & -1\\3 & 0 & -4\end{bmatrix},$$

Finn en inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$3A = A^2 - AB$$

og forklar hvorfor det ikke finnes en inverterbar 3×3-matrise A slik at

$$2A = A^2 - AB.$$