TMA4245 Statistikk
Vår 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Anbefalt øving 7
Løsningsskisse

Oppgave 1 Regner først ut den kumulative fordelingsfunksjonen til X:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{for} \quad x > 0$$

Skal finne sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$ og regner først ut fordelingsfunksjonen:

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(\max(X_1, X_2) \leq v) &= P(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v) \\ &\overset{uavh}{=} P(X_1 \leq v) P(X_2 \leq v) \\ &= F_X(v)^2 = (1 - e^{-\lambda v})^2 = 1 - 2e^{-\lambda v} + e^{-2\lambda v} \end{aligned}$$

Dvs. sannsynlighetstettheten til V blir:

$$f_V(v) = F'(v) = \underline{\underline{2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v}}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(V) = \int_0^\infty v(2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v}) dv &= 2\int_0^\infty v\lambda e^{-\lambda v} dv - \int_0^\infty v 2\lambda e^{-2\lambda v} dv \\ &= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \underline{\underline{\frac{3}{2\lambda}}} \end{aligned}$$

Vi har at $\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, dvs. vi har at $\underline{\underline{\mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(V) < 2\mathrm{E}(X)}}$ som ventet da V er den største av to X-er. Siden $V = \max(X_1, X_2)$ vil vi forvente at $\mathrm{E}(V) > \mathrm{E}(X)$ og at $\mathrm{E}(V) < \mathrm{E}(X_1 + X_2) = 2\mathrm{E}(X)$.

Oppgave 2

a) Vi benytter den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten. Regner først ut sannsynligheten for generell verdi av β, for så å regne ut for $\beta = \pi/8$. Dette gir

$$\mathrm{P}(Y > \pi/4) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq \pi/4) = 1 - \frac{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\} - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.1192}}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\pi/4 < Y < \pi/3) = \mathrm{P}(Y < \pi/3) - \mathrm{P}(Y < \pi/4) &= \frac{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} - \frac{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{\pi}{4\beta}\right\} - \exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} = \underline{\underline{0.0671}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y > \pi/4 | Y < \pi/3) = \frac{\mathrm{P}(Y > \pi/4 \cap Y < \pi/3)}{\mathrm{P}(Y < \pi/3)} &= \frac{0.0671}{\left(1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{3\beta}\right\}\right) / \left(1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}\right)} \\ &= \underline{\underline{0.0708}}.\end{aligned}$$

b) Siden Y er en kontinuerlig, kan vi finne sannsynlighetstettheten ved å derivere den kumulative fordelingsfunksjonen i oppgaveteksten

$$\begin{aligned}f(y;\beta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F(y;\beta) = \frac{1}{1 - \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \left(0 - \left(-\frac{1}{\beta}\right) \exp\left\{-\frac{y}{\beta}\right\}\right) &= \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\beta - \beta \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \exp\{-y/\beta\}}}\end{aligned}$$

Fra figuren i oppgaveteksten har vi at $\tan(Y) = X$, altså har vi en-til-en relasjon mellom vinkelen Y og avstanden X. Det betyr at vi kan benytte transformasjon av variable (kap 7.2 i læreboka) til å finne fordelingen til X. La $y = \arctan(x) = w(x)$, altså den omvendte funksjonen av funksjonen over. Vi har da at sannsynlighetsfordelingen til X, $g(x;\beta)$, er gitt ved

$$g(x;\beta) = f(w(x);\beta) \cdot |w'(x)|.$$

Opplysningen i oppgaven eller oppslag i Rottmann gir at $w'(x) = 1/(1 + x^2)$ som gir

$$\underline{\underline{g(x;\beta) = \frac{1}{\beta - \beta \exp\left\{-\frac{\pi}{2\beta}\right\}} \exp\{-\arctan(x)/\beta\} \cdot \frac{1}{1 + x^2}, \quad x > 0.}}$$

Oppgave 3

Fra oppgaveteksten har vi den betingede sannsynlighetsfordelingen til T gitt λ,

$$f_{T|\lambda}(t|\lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

og sannsynlighetsfordelingen til λ,

$$f_\lambda(\lambda) = \theta e^{-\lambda\theta}, \quad \lambda \geq 0,$$

hvor θ inngår som en parameter. Simultanfordelingen til T og λ er da gitt ved

$$f_{T,\lambda}(t,\lambda) = f_{T|\lambda}(t|\lambda) \cdot f_\lambda(\lambda) = \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)},$$

og marginalfordelingen til T kan finnes ved å integrere ut "mellomleddet" λ,

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty f_{T,\lambda}(t,\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \lambda\theta e^{-\lambda(t+\theta)}d\lambda \\
&= \theta\left(\left[\lambda\left(-\frac{1}{t+\theta}\right)e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t+\theta}e^{-\lambda(t+\theta)}d\lambda\right) \\
&= \theta\left(0 - 0 + \left[\frac{1}{(t+\theta)^2}e^{-\lambda(t+\theta)}\right]_0^\infty\right) \\
&= \theta\left(0 + \frac{1}{(t+\theta)^2}\right) = \frac{\theta}{(t+\theta)^2}.
\end{aligned}$$

Altså er den marginale sannsynlighetstettheten til T gitt ved

$$\underline{\underline{f_T(t) = \frac{\theta}{(t+\theta)^2}, \quad t \geq 0.}}$$

Oppgave 4

a) Fra formelsamlingen ser vi at både X og Y er eksponentialfordelte variable:

$$\begin{aligned}
X &\sim \text{eksp}(\beta_1) \implies \mathrm{E}(X) = \beta_1 \\
Y &\sim \text{eksp}(\beta_2) \implies \mathrm{E}(Y) = \beta_2,
\end{aligned}$$

og vi får at

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{\mathrm{E}(Y)} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

b) Først gjør vi et variabelskifte der $X = UV$ og $Y = V$ slik at $U = X/Y$ er den variabelen vi er ute etter. Deretter finner vi simultantettheten til U og V, før vi til slutt bruker denne til å finne marginaltettheten til U. Vi vet at simultantettheten til U og V er gitt ved

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))|J|,$$

der Jacobideterminanten $|J|$ er gitt ved

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |v|.$$

Dermed blir

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= \begin{cases} \frac{1}{\beta_1}e^{-uv/\beta_1} \cdot \frac{1}{\beta_2}e^{-v/\beta_2} \cdot |v| & \text{for } u,v > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{v}{\beta_1\beta_2}e^{-\left(\frac{u}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)v} & \text{for } u,v > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Marginaltettheten til U finner vi så ved å integrere ut V fra simultantettheten,

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv \\
&= \begin{cases} \int_0^\infty \frac{v}{\beta_1\beta_2} e^{-\left(\frac{u}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)v} dv & = \quad \frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_1+\beta_2 u)^2} \quad \text{for } u > 0 \\ 0 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{ellers.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

c) Forventningsverdien til U er

$$
\begin{aligned}
E(U) &= \int_{-\infty}^{\infty} u \; f_U(u)du \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta_1\beta_2 u}{(\beta_1+\beta_2 u)^2} du \\
&= \frac{\beta_1}{\beta_2} \int_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) ds = \underline{\underline{\infty}},
\end{aligned}
$$

hvor vi bruker substitusjonen $\beta_1 s = \beta_1 + \beta_2 u$ i siste linje.

Oppgave 5

Den stokastiske variabelen X er normalfordelt med forventningsverdi μ og varians σ^2,

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

og vi skal utlede sannsynlighetstetthetsfunksjonen til den stokastiske variabelen Y, som er gitt ved

$$Y = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Den kumulative sannsynlighetsfordelingen til Y er

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le y\right) = P(X \le \mu + \sigma y) = F_X(\mu + \sigma y).$$

Derivasjon med hensyn på y gir sannsynlighetstettheten $f_Y(y)$,

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy} F_X(\mu+\sigma y) \\
&= F_X'(\mu+\sigma y) \cdot \frac{d}{dy}(\mu + \sigma y) \\
&= f_X(\mu+\sigma y) \cdot \sigma \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((\mu+\sigma y)-\mu)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}.
\end{aligned}
$$

Dette er tettheten til normalfordelingen med $\mu = 0$ og $\sigma = 1$. Altså har vi at $Y \sim N(0,1)$.