Kontinuasjonseksamen i TMA4140: Diskret Matematikk

14 august, 2013 Løsningsforslag

Oppgave 1 For hver $n \in \mathbb{N}$ så eksisterer det en $m \in \mathbb{N}$ slik at $n < m$. Altså er $\exists n \forall m\, P(m,n)$ ikke sann.

For hver $m \in \mathbb{N}$ så eksisterer det en $n \in \mathbb{N}$ slik at $n \geq m$. Altså er $\forall m \exists n\, P(m,n)$ sann.

Oppgave 2 $f(0) = 2\lfloor \frac{0}{2} \rfloor = 0$ og $f(1) = 2\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

Altså er f ikke injektiv.

Observer at $f(n)$ er et partall for alle n. Altså er ikke f surjektiv.

Oppgave 3 Siden $C + 5 = (11)_{16}$, så er høyre siffer lik 1, med 1 som mente.

Siden $B + F + 1 = (1B)_{16}$, så er andre siffer lik B, med 1 som mente.

Siden $A + 2 + 1 = D$, så blir summen lik $(DB1)_{16}$.

Oppgave 4 For $n=1$ så får vi

$$\sum_{j=1}^{1}(2j+1) = 3 = 3\cdot 1^2$$, så likheten holder

for $n=1$. Anta at

$$\sum_{j=k}^{2k-1}(2j+1) = 3k^2 .$$

Da får vi:

$$\sum_{j=k+1}^{2(k+1)-1}(2j+1) = \sum_{j=k}^{2k-1}(2j+1) - (2k+1) + (4k+1) + (4k+3)$$

$$= 3k^2 + 6k + 3 = 3(k+1)^2$$

By induction the equality is true for all n.

Oppgave 5 a) Siden det er syv dager i uken, så må det være minst $7\cdot 4+1 = 29$ studenter for å være sikker på at minst fem av dem er født på samme ukedag.

b) De åtte 0'ene "låser" (eller "hefter") åtte 1'ere. De to ekstra 1'erne må fordeles innimellom de åtte 01 som forekommer i strengen. Disse kan stå sammen, dvs. som 11, og da er det 9 mulige posisjoner blant de åtte 01. De kan stå separert, og da er det $\binom{9}{2} = 36$ forskjellige mulige plasseringer. Ialt får vi $36+9=\underline{\underline{45}}$ strenger som oppfyller kravet.

<u>Oppgave 6</u> Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - 8r - 9 = (r-9)(r+1) = 0,$$

med karakteristiske røtter $r = 9$, $r = -1$. Altså er løsningen av formen

$$a_n = c_1 9^n + c_2 (-1)^n.$$

Av $a_0 = 3$ og $a_1 = 7$ utleder vi at $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Altså er løsningen

$$a_n = 9^n + 2(-1)^n.$$

Herav får vi:

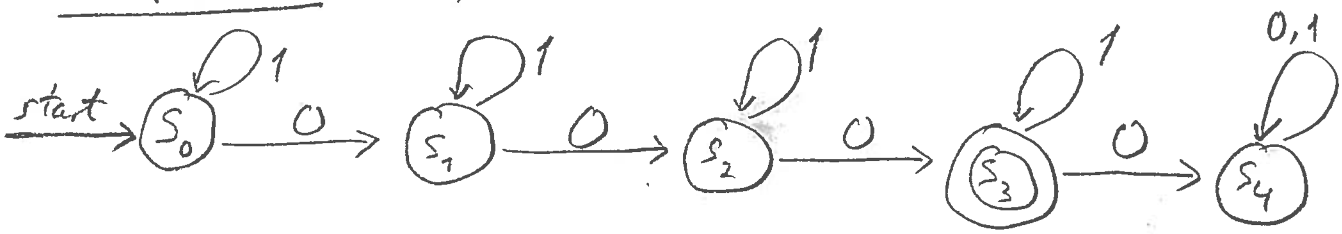
$$a_9 = 9^9 - 2 = \underline{387420487}$$

Oppgave 7

Kanten $\{1,4\}$ i G_2 har egenskapen at $\text{grad}(1) = \text{grad}(4) = 3$. Det finnes ingen kant i G_1 som har tilsvarende egenskap. Altså er de to grafene ikke isomorfe.

Oppgave 8

a)



b) $1^*0\,0^*\{\lambda \cup 1(0\cup 1)(0\cup 1)^*\}$

Oppgave 9

a) $\lambda \cup 0 \cup 101^*1$

b) Ved å følge beskrivelsen som gis i læreboken får man følgende automat M: