

I M1 lærte du at mange glatte funksjoner kan skrives som en potensrekke. En mye større klasse av funksjoner kan skrives som rekker av sinus- og cosinusfunksjoner.

Bevisene i dette kapitlet er ganske tekniske. Ikke les dem før du har regnet en haug med gamle eksamensoppgaver. Begynn med å forstå hvordan du setter opp en funksjons fourierrekke.

Komplekse funksjoner av en reell variabel

I M1 og M2 var alle funksjoner reelle. I M3 begynte vi så smått med komplekse funksjoner av en reell variabel når vi løste systemer av differensiallikninger. I dette kapitlet skal vi fortsette med det.

En *kompleks funksjon av en reell variabel* er en funksjon

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

Man kan tenke på f som en parametrisering av en kurve i det komplekse planet.

Eksempel 2.1. Funksjonen

$$f(x) = (1 + i)x \quad t \geq 0$$

beskriver en rett linje i første kvadrant i det komplekse planet. △

Eksempel 2.2. Fra M3 husker du kanskje Eulers formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Denne funksjonen kalles en *kompleks eksponensialfunksjon*. Merk at funksjonsverdiene ligger på enhets-sirkelen i det komplekse planet, og funksjonen kan betraktes som en parametrisering av denne. △

I mange tilfeller er det gunstig å skrive en reell funksjon som en kompleks funksjon.

Eksempel 2.3. Dersom vi erstatter x med $-x$ i Eulers formel, får vi

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Disse to likningene kan kombineres til

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

og

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Med andre ord: om vi har en funksjon som involverer sinus- og cosinusfunksjoner, kan den like gjerne skrives med komplekse eksponensialfunksjoner. △

Sinus- og cosinusfunksjoner har du jobbet med siden gymnaset, og derfor er de intuitive å jobbe med, og dessuten er de lette å visualisere. Komplekse eksponensialfunksjoner er vanskeligere å se for seg, men ofte mer praktiske i bruk. Noen beviser blir veldig hårete på reell form, og fouriertransform, som kommer i neste kapittel, er praktisk talt umulig å forstå uten komplekse eksponensialfunksjoner.

Periodiske funksjoner

Når man skal forstå fourierrekker er det ikke mulig å komme utenom periodiske funksjoner. En funksjon sies å ha *periode* $p > 0$ dersom

$$f(x + p) = f(x) \tag{2.1}$$

for alle x i definisjonsmengden til f . Den minste p slik at (2.1) holder, kalles *fundamentalperioden* til f .

Eksempel 2.4. La

$$f(x) = \sin x$$

Denne funksjonen har perioder $2n\pi$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er 2π . △

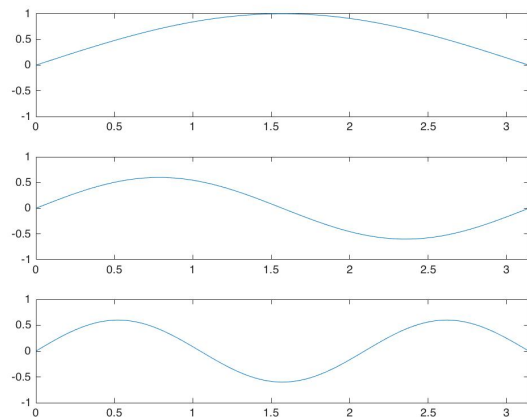
Dersom f har periode p , og $g(x) = f(kx)$, har g periode p/k , for

$$\begin{aligned} g(x) &= f(kx) = f(kx + p) \\ &= f(k(x + p/k)) = g(x + p/k). \end{aligned}$$

Eksempel 2.5. La

$$f(x) = \sin(3x)$$

Denne funksjonen har perioder $2n\pi/3$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Fundamentalperioden er $2\pi/3$. Under er plot av funksjonene $\sin x$, $\sin 2x$ og $\sin 3x$. △



Eksempel 2.6. Den komplekse eksponensialfunksjonen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ også åpenbart fundamentalperiode 2π . △

Ortogonale systemer

La f og g være komplekse funksjoner av en reell variabel på intervallet $[a, b]$. Integralet

$$\int_a^b f \bar{g} \, dx$$

er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, og har alle de samme egenskapene. Vi sier at f og g er *ortogonale* på $[a, b]$ dersom

$$\int_a^b f \bar{g} \, dx = 0.$$

Et *ortogonalt system* $\{\phi_n\}$ er familie av funksjoner ϕ_n som er innbyrdes ortogonale. Merk at siden $f\bar{f} = |f|^2 \geq 0$, er

$$\int_a^b f\bar{f} dx \geq 0,$$

og den eneste funksjonen som tilfredsstiller

$$\int_a^b f\bar{f} dx = 0$$

er $f = 0$. På samme vis som $\int_a^b f\bar{g} dx$ er en generalisering av indreproduktet mellom vektorer, er

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f\bar{f} dx}$$

en generalisering av lengden til en vektor.

Dersom en familie $\{\phi_n\}$ av funksjoner er innbyrdes ortogonale, sier vi at $\{\phi_n\}$ er et *ortogonalt system*, og dersom de tilfredsstiller

$$\int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} dx = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

sier vi at familien er *ortonormal*.

Eksempel 2.7. De komplekse eksponensialfunksjonene

$$e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

utgjør et ortogonalt system på intervallet $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx &= \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases} \quad \Delta \end{aligned}$$

Eksempel 2.8. Funksjonene

$$\frac{1}{2\pi} e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

er et ortonormalt system på intervallet $[-\pi, \pi]$. Δ

Dersom f og g er reelle, blir $f = \bar{f}$ og $g = \bar{g}$, slik at indreproduktet kan skrives

$$\int_a^b f g dx.$$

Reelle funksjoner kan også danne ortogonale systemer.

Eksempel 2.9. La $m, n \geq 1$. Siden

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0$$

utgjør $\{\sin nx, \cos mx\}$ også et ortogonalt system på $[-\pi, \pi]$. Det er ikke så vanskelig å se at disse er ortogonale. Vi beviser det for cosinusfunksjonene. Først skriver vi om litt:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx &= \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x dx & \end{aligned}$$

Det siste integralet er lett å beregne. Det forsvinner for alle verdier av m og n , unntatt når $m = n$, for da er

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi,$$

slik at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

De to andre formlene bevises på samme måte. Δ

Eksempel 2.10. Legendrepolynomene er en familie av polynomer gitt ved rekursjonen

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

og er et ortogonalt system på intervallet $[-1, 1]$. De første fem polynomene er:

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Vi skal ikke ha bruk for legendrepolynomene i dette kapitlet, men vi skal møte dem igjen i kapitlene om interpolasjon og numerisk integrasjon. Legendrepolynomene dukker opp i mange sammenhenger, både i matematikken og i andre fagfelt. Det kanskje mest kjente eksemplet utenfor matematikken, er Schrödingers likning for hydrogenatomet, der disse dukker opp i familien av løsninger. Δ

Dersom en funksjon kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjoner i et ortogonalt system, er det lett å utlede formler for koeffisientene i lineærkombinasjonen.

Teorem 2.11. Dersom $\{\phi_n\}$ er et ortonormalt system på $[a, b]$, og

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

er

$$c_n = \int_a^b f(x) \overline{\phi_n(x)} dx$$

Bevis. Vi ganger f med $\overline{\phi_m}$:

$$f(x)\overline{\phi_m} = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \overline{\phi_m},$$

integrerer

$$\int_a^b f(x)\overline{\phi_m} dx = \sum_{n=1}^N c_n \int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} dx,$$

og bruker ortogonaliteten:

$$\int_a^b f(x)e^{-imx} dx = c_m. \quad \square$$

Koeffisientene c_n kalles *fourierkoeffisientene*. De har følgende artige egenskap dersom vi begrenser oss til funksjoner som tilfredsstillers $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$.

Teorem 2.12. Dersom

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

er

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Bevis. Vi ganger nå f med \overline{f} :

$$f\overline{f} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n \overline{c_m} \phi_n \overline{\phi_m},$$

integrerer

$$\int_a^b f\overline{f} dx = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N c_n \overline{c_m} \int_a^b \phi_n \overline{\phi_m} dx,$$

og bruker igjen ortogonaliteten:

$$\int_a^b f(x)\overline{f(x)} dx = \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}. \quad \square$$

Dersom f ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av funksjonene ϕ_n , kan vi projisere f ned i rommet spent ut disse funksjonene. Lineærkombinasjonen med fourierkoeffisientene som vektor er den beste approksimasjonen til f i rommet utspent av ϕ_n , så lenge vi måler kvaliteten med funksjonsnormen definert ovenfor.

Teorem 2.13. Dersom

$$h(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)} dx$$

og

$$g(x) = \sum_{n=1}^N d_n \phi_n(x),$$

er

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$$

Bevis. Denne beregningen er litt hårete, men du finner nok ut av det med penn og papir:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx &= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx \\ &\quad - \int_a^b \overline{f(x)}g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx = \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{n=1}^N c_n \overline{d_n} - \sum_{n=1}^N \overline{c_n} d_n + \sum_{n=1}^N d_n \overline{d_n} &= \\ \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n} + \sum_{n=1}^N |c_n - d_n|^2. \end{aligned}$$

Det siste uttrykket er helt klart minimert dersom man velger $d_n = c_n$. \square

Det neste teoremet kalles gjerne *Bessels ulikhet*, ihvertfall dersom $n \rightarrow \infty$.

Teorem 2.14. Dersom

$$h(x) = \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x),$$

med

$$c_n = \int_a^b f(x)\overline{\phi_n(x)} dx$$

er

$$\sum_{n=1}^N |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

Bevis. Fra forrige bevis vet vi at

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}.$$

Siden

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|^2 dx \geq 0,$$

må

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \geq \sum_{n=1}^N c_n \overline{c_n}. \quad \square$$

Merk til slutt at dersom vi har uendelig mange funksjoner ϕ_n , impliserer Bessels ulikhet at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

er en konvergent rekke, og at $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$.

Fourierrekker

En *generell fourierrekke* er et uttrykk på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

En *trigonometrisk rekke* er en fourierrekke av trigonometriske funksjoner

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Merk at dette er en geometrisk rekke med multiplikasjonsfaktor e^{ix} . Fra nå av skal alt handle om trigonometriske rekker.

Definisjon. La f være en funksjon. Vi definerer f sin *fourierrekke* som

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og skriver

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Vi skal nå stille oss spørsmålet for hvilke f det er riktig å skrive

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Ved første øyekast kan man bli forledet til å tro at kun harmoniske svingebevegelser kan skrives på denne måten, og det trodde de fleste matematikere helt frem til 1800-tallet en gang. Det viser seg imidlertid at nesten alle funksjoner mellom himmel og jord kan skrives som trigonometriske rekker, bare man løser litt på konvergensbegrepet. Det har ikke vi mulighet til å gjøre ordentlig, men vi skal bevise et klassisk konvergensteorem. Først må vi bare ha litt mer maskineri.

Uttrykket

$$S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

kalles *den N-te partialsummen* til fourierrekken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Uttrykket

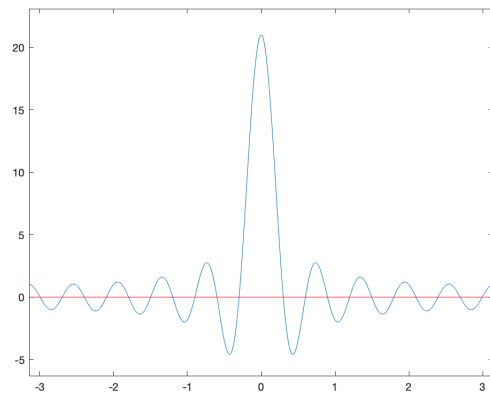
$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

kalles *dirichletkjernen*. Den er en reell funksjon, for vi kan skrive

$$D_N = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nx.$$

Under er et plot av dirichletkjernen for $N = 10$.

Vi kan også lage en enda penere formel. Først utnytter vi at en trigonometrisk rekke er en geometrisk



rekke med faktor e^{ix} , og skriver

$$e^{iNx} \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} = \frac{1 - e^{i(2N+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Siden

$$\frac{e^{-i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2}} e^{iNx} = 1$$

kan vi beregne

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{inx} &= \frac{e^{-i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2}} e^{iNx} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \\ &= \frac{e^{-i(N+1/2)x} + e^{i(N+1/2)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x}. \end{aligned}$$

for $x \neq 0$. Siden $D_N(0) = 2N + 1$, og

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{N + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2N + 1,$$

kan vi skrive

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} & x \neq 0 \\ 2N + 1 & x = 0 \end{cases}$$

Vi kan bruke dirichletkjernen til å skrive partialsummen til en fourierrekke som en konvolusjon:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{inx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy = f * D_N. \end{aligned}$$

Det er ikke så vanskelig demonstrere punktvis konvergens for funksjoner som er litt mer enn bare kontinuerlige.

Teorem 2.15. La f være en 2π -periodisk funksjon, og la x være et punkt slik at

$$|f(x-t) - f(x)| \leq M|t|$$

for alle $t \in (-\pi, \pi)$. Da er

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = f(x).$$

Bevis. Husk dirichletkjernen

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

For det første er det lett å se at

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dt = 2\pi,$$

og siden D_N er en 2π -periodisk funksjon, kan vi like gjerne skrive

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-x) dt = 2\pi.$$

På grunn av denne likningen, kan vi, siden både f og D_N er 2π -periodiske, skrive

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(t) dt.$$

Siden både f og D_N er 2π -periodiske, kan vi skrive

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x) D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Alt dette kan vi slå sammen til

$$f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-x) - f(x)) D_N(t) dt.$$

Vi tar en titt på funksjonen

$$g(t) = \frac{f(t-x) - f(x)}{\sin t/2}$$

Siden $|f(t-x) - f(x)| \leq M|t|$, er denne funksjonen er begrenset på $[-\pi, \pi]$. Den er ikke definert for $t = 0$, men det gjør ikke noe, for vi skal bare integrere den. Nå skriver vi

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N+1/2)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos t/2 \sin Nt dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin t/2 \cos Nt dt. \end{aligned}$$

Bruker vi Eulers formel på $\sin Nt$ og $\cos Nt$ ser vi at de to siste integralene er satt sammen av fourierkoeffisientene til funksjonene $g(t) \sin t/2$ og $g(t) \cos t/2$ og de komplekskonjugerte av disse. Fra Bessels ulikhet vet vi at alle disse fire må gå mot null når $N \rightarrow \infty$, og med andre ord må både

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos t/2 \sin Nt dt = 0$$

og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin t/2 \cos Nt dt = 0$$

slik at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = f(x). \quad \square$$

Kommentar. Det finnes noen berømte eksempler på kontinuerlige funksjoner der fourierrekken ikke konvergerer i alle punkter. Så at f er kontinuerlig, er ikke nok. Betingelsen

$$|f(x-t) - f(x)| \leq M|t|$$

for alle $t \in (-\pi, \pi)$, kalles gjerne *Lipschitz-kontinuitet*, og er litt strengere enn vanlig kontinuitet.

Det går an å vise et litt mer generelt teorem, men det skal ikke vi gjøre, vi bare skriver det opp.

Teorem 2.16. La f være en stykkvis kontinuerlig deriverbar funksjon på $[-\pi, \pi]$, der den venstre- og høyrederiverte eksisterer i eventuelle bruddpunkter, og la

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Hvis f er kontinuerlig i punktet x , konvergerer fourierrekken til $f(x)$ i x . Dersom f ikke er kontinuerlig i x , konvergerer fourierrekken til

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}.$$

I endepunktene konvergerer fourierrekken til

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi-h) + f(-\pi+h)}{2}.$$

Dersom f er kontinuerlig deriverbar, er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på $(-\pi, \pi)$, og dersom f er kontinuerlig deriverbar med periode 2π , er

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

på $[-\pi, \pi]$.

En haug med eksempler

I dette avsnittet skal jeg beregne en helt syk mengde eksempler for dere.

Eksempel 2.17. Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Vi beregner

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0,$$

og

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} \, dx = -\frac{1}{2in} (e^{-in\pi} + e^{in\pi}) \\ &= -\frac{1}{in} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{in}. \end{aligned}$$

Siden x er glatt på intervallet $(-\pi, \pi)$, blir fourierrekken

$$\begin{aligned} x &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{-inx} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad \triangle \end{aligned}$$

Fourierrekker på reell form

Dersom f er reell, blir fourierrekken også reell, som illustrert i forrige eksempel. Vi kan fint sette opp fourierrekken direkte med sinus- og cosinusfunksjoner:

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

for disse funksjonene utgjør også et ortogonalt system. koeffisientene blir

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Eksempel 2.18. Vi finner fourierrekken til

$$f(x) = x \quad \text{der} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

en gang til. Vi beregner

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0 & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Merk at symmetri gir a_0 og a_n , mens b_n må beregnes. Fourierrekken blir som kjent

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \quad \triangle$$

Eksempel 2.19. Vi finner heavisidefunksjonen

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

sin reelle fourierrekke på $(-\pi, \pi)$. Vi beregner

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \\ &= \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{for } n \text{ oddetall} \\ 0 & \text{for } n \text{ partall.} \end{cases} \end{aligned}$$

Altså kan vi skrive

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Fourierrekken konvergerer til u på intervallene $(-\pi, 0)$ og $(0, \pi)$, og til $1/2$ i $x = 0$ og $x = \pm\pi$. Partialsummer er funksjoner på formen

$$S_N = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

Under er plot av partialsummer for $n = 2$, $n = 5$ og $n = 100$. Jeg har plottet på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ for å illustrere hvordan fourierrekken oppfører seg utenfor intervallet $[-\pi, \pi]$. \triangle

Formler for overgang mellom kompleks og reell fourierrekke

Vi har sett i eksempler at dersom f er en reell funksjon, blir fourierrekken også reell, til tross for at de trigonometriske eksponensialene er komplekse funksjoner. Dette følger av formelen for koeffisientene c_n . Dersom f er reell, kan vi skrive

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx = \overline{c_{-n}} \end{aligned}$$

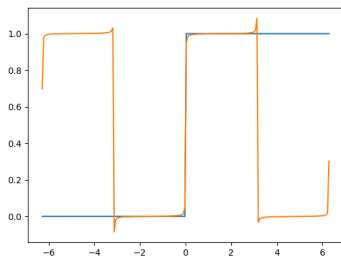
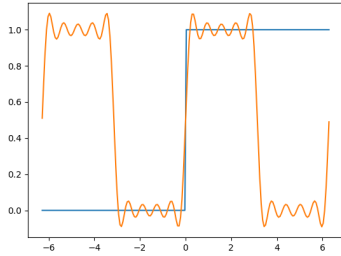
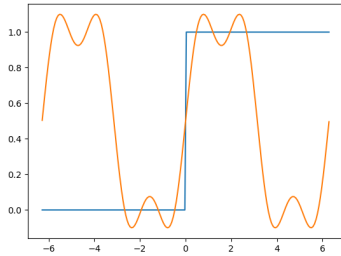
Dette betyr at

$$c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = c_n e^{inx} + \overline{c_n e^{inx}}$$

blir en reell funksjon, og følgelig er hele fourierrekken reell.

Vi kan utlede formel for overgangen mellom fourierrekker på reell og kompleks form:

$$\begin{aligned} c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-inx} + e^{inx}) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 c_n - c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-inx} - e^{inx}) dx \right) \\
 &= \frac{-i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = -ib_n
 \end{aligned}$$

Vi kan selvfølgelig også snu om på disse formlene, og skrive

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Fourierrekker på andre intervaller

Å utlede formler for fourierrekker på andre intervaller enn $[-\pi, \pi]$ er ikke vanskelig. For intervallet $[-L, L]$ skriver man

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}. \quad (2.2)$$

eller

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Koeffisientene er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{n\pi x}{L}} dx,$$

og

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

henholdsvis. Utledning er identisk med utledning på intervallet $[-\pi, \pi]$. På samme måte kan man sette opp fourierrekker på intervallet $[a, b]$, men det dropper vi.

Eksempel 2.20. Vi beregner den komplekse fourierrekken til heavisidefunksjonen på $[-1, 1]$. Koeffisientene blir

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{n\pi i} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for jevne } n, \end{cases}
 \end{aligned}$$

slik at

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i x}.$$

Merk nok en gang at

$$c_n e^{n\pi i x} + c_{-n} e^{-n\pi i x} = \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x,$$

slik at

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} e^{(2n-1)\pi i x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x. \quad \triangle$$

Odde og jevne funksjoner

Vi sier at en funksjon er odde dersom

$$f(-x) = -f(x)$$

og jevn dersom

$$f(-x) = f(x).$$

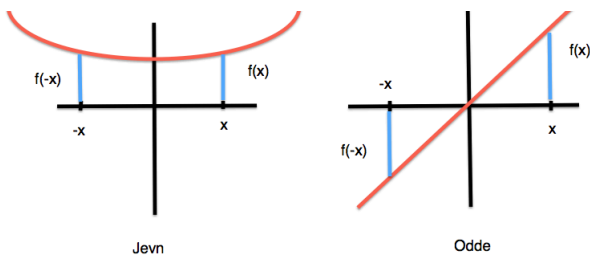
for alle x i definisjonsmengden til f . Grafen til en odde funksjon blir identisk dersom du dreier den π radianer om origo, mens grafen til en jevn funksjon blir identisk dersom du speiler den om y -aksen. En rask kikk på figur overbeviser oss om at

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

for odde funksjoner, og

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

for jevne funksjoner.



Eksempel 2.21. Man kan vise at produktet av to jevne eller to odde funksjoner blir en jevn funksjon, og at produktet av en jevn og en odde funksjon blir en odde funksjon. La f være odde og g være jevn. Siden $f(-x) = -f(x)$, og $g(-x) = g(x)$, får vi

$$f(-x)g(-x) = -f(x)g(x),$$

altså er fg en odde funksjon. De andre tilfellene bevises på samme måte. \triangle

Eksempel 2.22. Merk at $u - \frac{1}{2}$ er en odde funksjon. Denne strukturen kommer til syne i fourierrekken til u . \triangle

Merk at dersom f er odde, er $a_n = 0$ for alle n , mens dersom f er jevn, er $b_n = 0$ for alle n . Fourierrekken til en odde funksjon inneholder følgelig kun sinusfunksjoner, mens fourierrekken til jevne funksjoner inneholder kun cosinusfunksjoner.

Odde og jevne utvidelser

Dersom en funksjon f har definisjonsmengde $(0, L)$, kan vi definere den odde utvidelsen

$$f_o = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ -f(-x) & \text{for } x = (-L, 0) \end{cases}$$

og den jevne utvidelsen

$$f_j = \begin{cases} f(x) & \text{for } x = (0, L) \\ f(-x) & \text{for } x = (-L, 0). \end{cases}$$

Siden både f_o og f_j er identiske med f på $(0, L)$, vil fourierrekken deres konvergere til $f(x)$ på $(0, L)$. Man kan således velge mellom sinus eller cosinus når man skal fourierutvikle f på $(0, L)$. Disse kalles henholdsvis sinus- og cosinusrekken til f på $(0, L)$.

Vi ser på fourierutviklingen til f_o . For den har vi at $a_n = 0$ for alle n , og at

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

For fourierutviklingen til f_j , har vi tilsvarende at

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_j(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

samt

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_j(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Eksempel 2.23. Vi beregner cosinusrekken til $f(x) = x$ på $(0, \pi)$. Koeffisientene blir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi/2$$

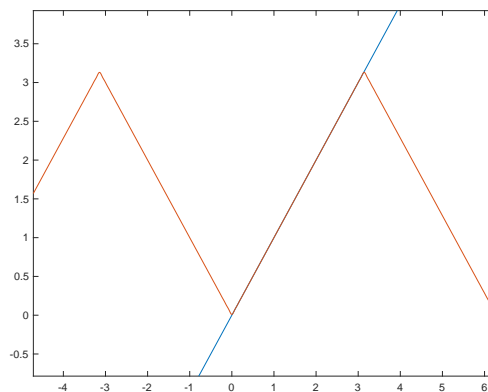
og

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \begin{cases} \frac{-4}{\pi n^2} & \text{for odde } n \\ 0 & \text{for for jevne } n. \end{cases}$$

slik at

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x$$

på intervallet $(0, \pi)$. Under er et plot af $f(x) = x$ og cosinusrekken på et litt større intervall enn $[0, \pi]$. \triangle



Parsevals identitet

Teorem 2.24. Anta integralet

$$\int_{-L}^L f^2(x) dx$$

eksisterer, og at

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

Da gjelder Parsevals identitet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \end{aligned}$$

Bevis. Denne er lettest å bevise om man starter på kompleks form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}.$$

Vi ganger denne likheten med seg selv

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i \frac{m\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{-m} e^{i \frac{-m\pi x}{L}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} e^{i \frac{(n-m)\pi x}{L}} \end{aligned}$$

og integrerer

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f^2(x) dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n c_{-m} \int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi x}{L}} dx \\ &= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} \\ &= 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \bar{c}_n = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Likningen

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

vises på samme måte. \square

Noen artige anvendelser

Her er en samling eksempler som ofte dukker opp på eksamen i M4.

Eksempel 2.25. Vi kan bruke fourierrekken til heavisidefunksjonen til å finne summen til rekken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Siden

$$u(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

og u er glatt i $x = \pi/2$, ser vi at

$$\begin{aligned} 1 = u(\pi/2) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}. \end{aligned}$$

Dette betyr at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \quad \triangle$$

Eksempel 2.26. Vi kan bruke Parsevals identitet til å finne summen til den kjente og kjære rekken

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Siden

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

gir Parsevals identitet at

$$\frac{2\pi^2}{3} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

eller

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad \triangle$$

Epilog

Du husker kanskje projeksjon fra M3. Vi gjengir et avsnitt. Denne epilogen er ikke essensiell lesning dersom du bare ønsker å komme deg gjennom eksamen, men viktig hvis du ønsker å sette fourieranalysen i sammenheng med ting du har lært tidligere.

Hvis vi har en ortogonal basis for et rom, er det veldig lett å finne en vektors komponenter i rommet. La oss si at vi ønsker å finne vektoren \mathbf{v} sine komponenter i basisen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Komponentene til \mathbf{v} er gitt ved likningen

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n = U \mathbf{x}$$

Hvis vi ganger begge sider av denne likningen med U^* , får vi

$$U^* \mathbf{v} = U^* U \mathbf{x},$$

og siden kolonnene til U er ortogonale, blir den kvadratiske matrisen $U^* U$ diagonal:

$$U^* U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{u}_3^* \mathbf{u}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n \end{bmatrix}.$$

Følgelig er løsningen av systemet $U^* \mathbf{v} = U^* U \mathbf{x}$ enkel å skrive opp.

Teorem 2.27. La $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ være en ortogonal basis for V , og la $\mathbf{v} \in V$. I så fall kan \mathbf{v} skrives

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{u}_n^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n$$

Vi kan også projisere en vektor ned i et rom der den ikke hører hjemme. Projeksjonen minimerer avstanden fra rommet til vektoren.

Teorem 2.28. La $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ være en ortogonal basis for V , og la $\mathbf{v} \notin V$. Punktet

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\mathbf{u}_n^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n} \mathbf{u}_n$$

er det punktet i V som har kortest avstand til \mathbf{v} :

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'\| = \min_{\mathbf{w} \in V} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$$

Disse teoremene beviste vi for ortogonale systemer i dette kapitlet. Fourieranalyse spinner videre

på dette, og setter opp de samme teoremene, bare i uendelig mange dimensjoner. Vi definerer indreproduktet

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \bar{g} dx,$$

lager oss en ortogonal mengde,

$$e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z}$$

og prøver å skrive funksjoner som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

der

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Uttrykket

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

kan betraktes som projeksjonen av f ned i det uendeligdimensjonale rommet utspent av funksjonene e^{inx} , og koeffisienten

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

er f sin komponent langs vektoren e^{inx} . Beregningen

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{imx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

ville vi i M3 skrevet

$$\mathbf{u}_n^* \mathbf{u}_n = 2\pi,$$

og

$$\mathbf{u}_n^* \mathbf{v} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx,$$

og så satt sammen alt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{u}_1^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2^* \mathbf{v}}{\mathbf{u}_2^* \mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 + \dots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

Det kan også nevnes at Parsevals teorem er en uendeligdimensjonal variant av Pytagoras' teorem, som du lærte allerede på ungdomsskolen.

Med dette i bakhuert, er det naturlig å spørre seg hva slags vektorrom funksjonene e^{inx} er basis for. Dette er et komplisert spørsmål, og ble ikke ordentlig besvart før tidlig på 1900-tallet. Rommet heter L^2 , og vi skal snakke litt løst om ingrediensene i konstruksjonen.

For å få et meningsfylt svar, må man for det første gå over til å betrakte ekvivalensklasser av funksjoner, heller enn funksjoner. Grunnen er at funksjoner som kun er forskjellige i enkelte punkter her og der, vil ha den samme fourierrekken, og dette kan vi ikke ha noe av, for et element i rommet bør helst kunne representeres på en entydig måte i basisen $\{e^{inx}\}$.

For det andre må man justere litt på konvergensbegrepet. Hva vil det si at rekken

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

konvergerer til f ? Punktvis konvergens, altså at fourierrekken konvergerer til f for hver x , er greit hvis man skal bevise noe i et grunnleggende kurs i fourieranalyse, men om man løsner litt på konvergensbegrepet, vil man se at det finnes en mye større klasse av funksjoner kan representeres ved sin fourierrekke. Vi beviser heller at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{når } N \rightarrow \infty.$$

som kalles L^2 -konvergens. Denne konvergens sier i prinsippet at arealet mellom f og partialsummen skal gå mot null når partialsummen går mot fourierrekken til f .

Når alt dette er sagt og gjort, ekvivalensklasser av funksjoner er definert, og L^2 -konvergens er tatt i bruk, kan man vise at L^2 består, litt forenklet, av alle funksjoner som tilfredsstiller

$$\int_{-\pi}^{\pi} f \bar{f} dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty.$$

Legendrepolyomene er en ortogonal basis for $L^2[-1, 1]$.

Joseph Fourier oppfant fourierrekker da han prøvde å løse varmelikningen tidlig på 1800-tallet. Ideene hans ble i noen grad avskrevet av samtidige matematikere, for bevisene hans holdt ikke alltid vann. Men eksemplene han oppdrev på at en diskontinuerlig funksjon kan skrives som en uendelig rekke av glatte funksjoner, var banebrytende, og stimulerer andre matematikere til å utvikle nytt maskineri for å rydde opp i disse konvergensspørsmålene, som Fourier bare gjettet tildels riktig på.

Andre artige opplysninger om Joseph Fourier, er at at han ble satt i fengsel under den franske revolusjon, dro til Egypt med Napoleon Bonaparte, og regnes som første som oppdaget drivhuseffekten.