Løsningsforslag

Oppgave 1 Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -13 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & -4 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & -4 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & -13 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & -4 & 9 \\ 0 & -5 & -10 & -5 & -15 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 6 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dette gir likningene

$$x_1 - 7x_4 = 0$$

og

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 3.$$

Vi har altså to frie variabler; det finnes mange valg av parametrisering. Du kan for eksemepl velge $x_3 = s$ og $x_4 = t$ som parametere. Dette gir løsningene

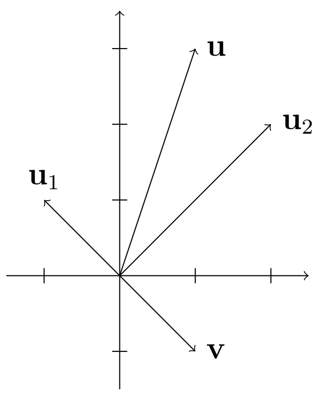
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \text{for alle reelle tall } s \text{ og } t.$$

Oppgave 2 Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ er:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}^\top \mathbf{u}}{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}} \mathbf{v} = \frac{-2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi skal ha $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Da får vi:

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -16 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

være koeffisientmatrisen. Vi begynner med å finne egenverdiene og egenvektorene til A. Det karakteristiske polynomet er:

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -16 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -16 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda - 24)$$

Egenverdiene er altså løsningene av likningen

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda - 24) = 0.$$

Det betyr at det er tre egenverdier: 2, -2 og 12.

Vi finner en egenvektor som hører til egenverdien 2 ved å løse likningen $(A - 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Løsningene er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \qquad \text{for alle relle tall } t,$$

så vi kan for eksempel velge vektoren $(0, 1, 0)$.

Tilsvarende fremgangsmåte for -2 og 12 gir henholdsvis $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Til slutt setter vi inn i formelen for generell løsning:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{12t}.$$

Oppgave 4 Husk at determinanten ikke endrer seg dersom man legger til et multiplum av en rad til en annen, og determinanten multipliseres med -1 dersom man bytter om på to rader:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1-i & i & 4 \\ 3 & 1 & 1-2i & 4+7i \\ 6i & 2+2i & -2 & 3i \\ -3 & -1+i & 1 & 3-4i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1-i & i & 4 \\ 0 & i & 1-3i & 7i \\ 0 & 0 & 0 & -5i \\ 0 & 0 & 1+i & 7-4i \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 3 & 1-i & i & 4 \\ 0 & i & 1-3i & 7i \\ 0 & 0 & 1+i & 7-4i \\ 0 & 0 & 0 & -5i \end{vmatrix}$$
$$= -3 \cdot i \cdot (1+i) \cdot (-5i) = -15 - 15i$$

Oppgave 5 Informasjonen i oppgaven er essensielt en diagonalisering av matrisen. Vi har tre lineært uavhengige egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

med tilhørende egenverdier 3, 3 og -2. Vi lager en matrise

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

med egenvektorene som kolonner, og en diagonalmatrise

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

med egenverdiene på diagonalen. Matrisen vi vil finne er da gitt ved diagonaliseringen VDV^{-1}.

For å kunne regne ut matrisen gjenstår det å finne inversen til V. Vi regner ut denne på vanlig måte:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Vi leser av at inversen til V er:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Nå kan vi regne ut matrisen vi skulle finne:

$$VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 5 \\ 30 & 3 & 10 \\ -60 & 0 & -17 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6 Vi begynner med å gausseliminere matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette viser at vi har pivotelementer i første og andre kolonne. Det betyr at

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for kolonnerommet. Men denne basisen er ikke ortogonal (indreproduktet av de to vektorene er 18, ikke 0). Vi ortogonaliserer den med Gram–Schmidt-metoden:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{18}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Nå har vi funnet en ortogonal basis $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ for kolonnerommet til matrisen.

Oppgave 7 Skriv B på elementform:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_4 \\ b_2 & b_5 \\ b_3 & b_6 \end{bmatrix}$$

Produktet AB kan nå uttrykkes ved

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_4 \\ b_2 & b_5 \\ b_3 & b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_1 + 4b_3 & 3b_4 + 4b_6 \\ 2b_1 + b_2 + b_3 & 2b_4 + b_5 + b_6 \end{bmatrix}$$

Vi ønsker å bestemme b_i-ene slik at $AB = I$:

$$\begin{bmatrix} 3b_1 + 4b_3 & 3b_4 + 4b_6 \\ 2b_1 + b_2 + b_3 & 2b_4 + b_5 + b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dette er fire likninger med seks ukjente:

$$\begin{aligned} 3b_1 + 4b_3 &= 1 \\ 2b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \\ 3b_4 + 4b_6 &= 0 \\ 2b_4 + b_5 + b_6 &= 1 \end{aligned}$$

Vi ser at $b_3 = t$ og $b_6 = s$ er frie variabler. Multipliser andre og fjerde likning med 3, og bruk første likning for å eliminere b_1 i andre likning; tredje likning for å eliminere b_4 i fjerde likning:

$$b_1 = \frac{1-4t}{3} \qquad b_2 = \frac{5t-2}{3} \qquad b_4 = -\frac{4}{3}s \qquad b_5 = \frac{5s+3}{3}$$

(Du kan alternativt skrive opp totalmatrisen til systemet og radredusere.)

Alle løsninger kan dermed parametriseres som

$$B = \begin{bmatrix} (1-4t)/3 & -4s/3 \\ (5t-2)/3 & (5s+3)/3 \\ t & s \end{bmatrix} \qquad \text{der } s \text{ og } t \text{ er reelle tall.}$$

Men oppgaven spør bare etter én løsning. Vi kan for eksempel ta t og s lik null for og få følgende løsning:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 Vi vet at $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ og $T(\mathbf{w})$ er lineært uavhengige, hvor T er en lineærtransformasjon.

Vi ønsker å vise at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige. Anta at de er lineært avhengige (for å vise at dette umulig kan stemme). Dette betyr – per definisjon – at det eksisterer koeffisienter a, b og c, ikke alle lik null, slik at

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Anvend T på begge sider for å få

$$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}) = T(\mathbf{0}).$$

Vi vet at T er lineær som gir

$$aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v}) + cT(\mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Denne likningen betyr i så fall at $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ og $T(\mathbf{w})$ også er lineært avhengige. Men vi *vet* jo at de er lineært uavhengige – antagelsen er altså umulig . Dermed må $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være lineært uavhengige – som er det vi ønsket å vise.

Oppgave 9 Vi husker at vi har følgende tre kriterier for å sjekke om en gitt delmengde U av et vektorrom er et underrom:

1. Nullvektoren er med i U.
2. For alle vektorer $\mathbf{u}$ og v i U er også summen $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ med i U.
3. For alle vektorer $\mathbf{u}$ i U og alle skalarer c er også produktet $c\mathbf{u}$ med i U.

Vi sjekker at disse tre kriteriene holder når U er mengden av symmetriske 2×2-matriser:

1. Nullvektoren – altså matrisen $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ – er symmetrisk, så den er med i U.

2. Hvis
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad N = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{bmatrix}$$
er symmetriske matriser, så er også summen
$$M + N = \begin{bmatrix} a + a' & b + b' \\ b + b' & d + d' \end{bmatrix}$$
en symmetrisk matrise.

3. Hvis
$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$
er en symmetrisk matrise og c en skalar, så er også produktet
$$cM = \begin{bmatrix} ca & cb \\ cb & cd \end{bmatrix}$$
en symmetrisk matrise.

Dette vil si at U er et underrom av $\mathcal{M}_2$.

Videre skal vi finne en basis for U. Vi ser at de tre matrisene
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
utspenner U, siden enhver symmetrisk matrise $M = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$ kan skrives som en lineærkombinasjon
$$M = aB_1 + bB_2 + dB_3$$
av disse. Matrisene B_1, B_2 og B_3 er dessuten lineært uavhengige, siden likningen
$$c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ikke har andre løsninger enn den trivielle løsningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dette vil si at (B_1, B_2, B_3) er en basis for U.

Basisen vi fant for U består av tre basisvektorer, så dimensjonen til U er 3. Vi kan lett sjekke at
$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
er en basis for $\mathcal{M}_2$, og det betyr at dimensjonen til $\mathcal{M}_2$ er 4.

Oppgave 10 Rangen til A er det samme som dimensjonen til kolonnerommet:

$$r = \dim \operatorname{Col} A$$

Dette betyr at kolonnerommet har en basis som består av r vektorer. La $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r)$ være en slik basis, og la

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{bmatrix}$$

være $m \times r$-matrisen med basisvektorene som kolonner.

La $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ være kolonnene i A. Hver kolonne $\mathbf{a}_i$ ligger i kolonnerommet til A, så den kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{a}_i = c_{i1}\mathbf{b}_1 + c_{i2}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{ir}\mathbf{b}_r$$

av basisvektorene. Koeffisientene i dette uttrykket kan vi sette sammen til en vektor

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ir} \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^r$. Da har vi:

$$\mathbf{a}_i = c_{i1}\mathbf{b}_1 + c_{i2}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{ir}\mathbf{b}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{ir} \end{bmatrix} = B\mathbf{c}_i$$

Nå har vi definert en vektor $\mathbf{c}_i$ for hver kolonne $\mathbf{a}_i$ fra A; det betyr at vi har definert n vektorer $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, …, $\mathbf{c}_n$. Vi lager en $r \times n$-matrise

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

med disse vektorene som kolonner.

Nå har vi funnet en $m \times r$-matrise B og en $r \times n$-matrise C, og vi har

$$BC = \begin{bmatrix} B\mathbf{c}_1 & B\mathbf{c}_2 & \cdots & B\mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = A.$$