NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Estimatorar

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

28.02.2019

I dag

- Repetisjon
- Estimatorar
- Eigenskapar til S^2
- Introduksjon til sannsynsmaksimeringsestimator

Repetisjon

Obervator

Ein **observator** (eng: statistic) er ein funksjon av stokastiske variablar i eit tilfeldig utval.

Utvalsfordeling

Fordelinga til ein observator kallast utvalsfordelinga (eng: sampling distribution).

Ofte brukte observatorar

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Sentralgrenseteoremet (utvalsfordelinga til $\bar{X}$)

Teorem

La X_i vere uavhengig identisk fordelte (u.i.f.) stokastiske variablar med $E(X_i) = \mu_X$ og $Var(X_i) = \sigma_X^2 < \infty$ for $i = 1, \ldots, n$. La $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Då vil fordelinga til

$$Z = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{SD(\bar{X}_n)} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

gå mot ei standard normalfordeling når $n \to \infty$.

Sentralgrenseteoremet (utvalsfordelinga til $\bar{X}$)

Teorem

La X_i vere uavhengig identisk fordelte (u.i.f.) stokastiske variablar med $E(X_i) = \mu_X$ og $Var(X_i) = \sigma_X^2 < \infty$ for $i = 1, \ldots, n$. La $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Då vil fordelinga til

$$Z = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{SD(\bar{X}_n)} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}$$

gå mot ei standard normalfordeling når $n \to \infty$.
Dette tilsvarar

$$\bar{X}_n \approx n\left(x; \mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right).$$

Estimatorar

Definisjon

Anta at me har eit tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå $f(x;\theta)$-populasjonen, der verdien til parameteren θ er ukjend. Ein estimator er ein observator som nyttast til å anslå verdien til θ.

Definisjon

Anta at me har eit tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå $f(x;\theta)$-populasjonen, der verdien til parameteren θ er ukjend. Ein estimator er ein observator som nyttast til å anslå verdien til θ.

Forventningsrett estimator

Ein observator $\hat{\theta}$ seies å verre ein forventningsrett (eng: unbiased) estimator for parameteren θ dersom

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Definisjon

Anta at me har eit tilfeldig utval $X_1, X_2, \ldots, X_n$ frå $f(x;\theta)$-populasjonen, der verdien til parameteren θ er ukjend. Ein estimator er ein observator som nyttast til å anslå verdien til θ.

Forventningsrett estimator

Ein observator $\hat{\theta}$ seies å verre ein forventningsrett (eng: unbiased) estimator for parameteren θ dersom

$$E(\hat{\theta}) = \theta.$$

Effisient estimator

Av fleire forventningsrette estimatorar for θ seier me at den med minst varians er den mest effisiente.
Me føretrekk den mest effisiente estimatoren.

Eksempel

— Situasjon: måle lydhastigheiter i eit gjeve medium

— n målingar: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$ (σ kjend)

— Mål: anslå sann lydhastigheit μ

Eksempel

- Situasjon: måle lydhastigheiter i eit gjeve medium
- n målingar: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$ (σ kjend)
- Mål: anslå sann lydhastigheit μ

To moglege estimatorar

$$\widehat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{X} \qquad \text{(medianen)}$$

Illustrasjon ved simulering

- Situasjon:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
  - Verdien til μ er ukjent.
  - Skal estimere (anslå) verdien til μ.
- Naturlige estimatorer:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} \text{ (gjennomsnitt)} \quad \text{og} \quad \hat{\mu}_2 = \widetilde{X} \text{ (empirisk median)}$$

Illustrasjon ved simulering

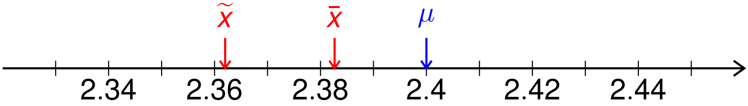
— Situasjon:

- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Generer observasjoner $X_i \sim$ n$(x_i; 2.4, 0.1)$.

$$2.480, 2.262, 2.560, 2.281, 2.503, 2.362, 2.258, 2.282, 2.456$$

$$\bar{x} = 2.3827 \quad \text{og} \quad \widetilde{x} = 2.362$$

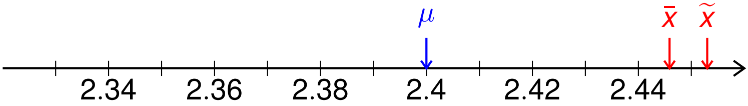


Illustrasjon ved simulering

- Situasjon:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
  - Verdien til μ er ukjent.
  - Skal estimere (anslå) verdien til μ.
- Generer observasjoner $X_i \sim$ n$(x_i; 2.4, 0.1)$.

$$2.482, 2.407, 2.415, 2.406, 2.480, 2.453, 2.512, 2.331, 2.527$$

$$\bar{x} = 2.4459 \quad \text{og} \quad \widetilde{x} = 2.453$$



Illustrasjon ved simulering

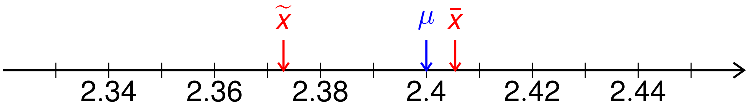
— Situasjon:

- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Generer observasjoner $X_i \sim$ n$(x_i; 2.4, 0.1)$.

$$2.464, 2.277, 2.547, 2.393, 2.373, 2.369, 2.321, 2.369, 2.536$$

$$\bar{x} = 2.4054 \quad \text{og} \quad \widetilde{x} = 2.373$$



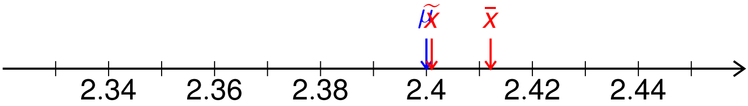
Illustrasjon ved simulering

— Situasjon:
- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra $\mathrm{n}(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Generer observasjoner $X_i \sim \mathrm{n}(x_i; 2.4, 0.1)$.

$$2.544, 2.401, 2.465, 2.430, 2.389, 2.461, 2.330, 2.325, 2.364$$

$$\bar{x} = 2.4121 \quad \text{og} \quad \widetilde{x} = 2.401$$



Illustrasjon ved simulering

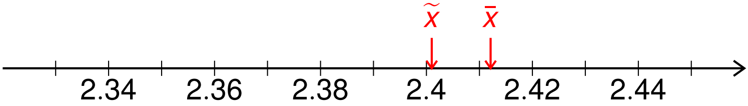
— Situasjon:

- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Observerer verdier for $X_1, X_2, \ldots, X_9$.

$$2.544, 2.401, 2.465, 2.430, 2.389, 2.461, 2.330, 2.325, 2.364$$

$$\bar{x} = 2.4121 \quad \text{og} \quad \widetilde{x} = 2.401$$



Illustrasjon ved simulering

- Situasjon:
  - $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n($x; \mu, \sigma$)-populasjonen.
  - Verdien til μ er ukjent.
  - Skal estimere (anslå) verdien til μ.
- Gjentar forsøket 10 000 ganger.
  - Lager histogram over de 10 000 verdiene av $\bar{x}$ og $\widetilde{x}$.

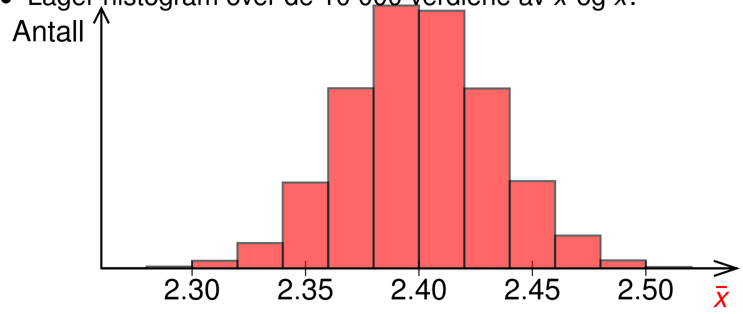
Illustrasjon ved simulering

— Situasjon:

- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Gjentar forsøket 10 000 ganger.

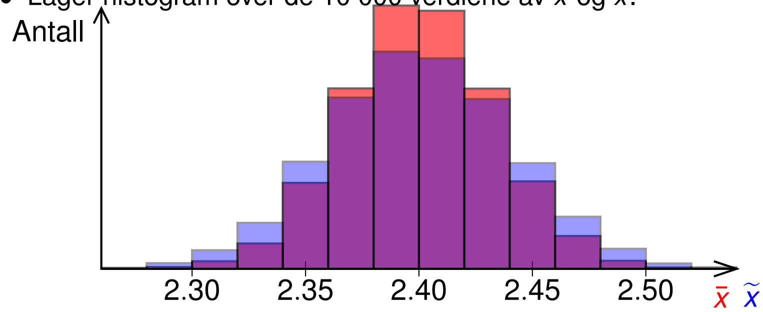
- Lager histogram over de 10 000 verdiene av $\bar{x}$ og $\tilde{x}$.



Illustrasjon ved simulering

— Situasjon:
- $X_1, X_2, \ldots, X_9$ tilfeldig utvalg fra n$(x; \mu, \sigma)$-populasjonen.
- Verdien til μ er ukjent.
- Skal estimere (anslå) verdien til μ.

— Gjentar forsøket 10 000 ganger.
- Lager histogram over de 10 000 verdiene av $\bar{x}$ og $\widetilde{x}$.



Eigenskapar til S^2

Eigenskapar til S^2

Teorem

Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. frå $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen. Då er $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ein forventningsrett estimator for σ^2, det vil seie

$$E(S_n^2) = \sigma^2.$$

Sannsynsmaksimeringsestimator

Eksempel

— Undersøk levetida X til elektroniske komponentar

— Anta at levetida er eksponentialfordelt ($E(X) = 1/\lambda$, λ ukjend)

— Test n komponenter

$$X_1 \sim f(x_1; \lambda)$$
$$X_2 \sim f(x_2; \lambda)$$
$$\vdots$$
$$X_n \sim f(x_n; \lambda)$$

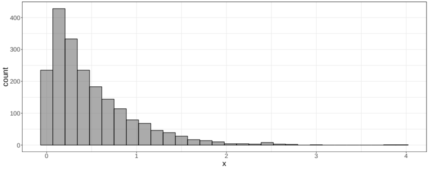


Figure: Observerte levetider

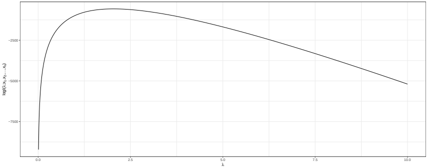


Figure: Log-rimelighetsfunksjon

Neste veke

- Meir om sannsynsmaksimeringsestimator
- Konfidensintervall