MA1201 Lineær algebra og geometri
Notater fra forelesning 18 september 2015
Feil som finnes kan rapporteres til *Magnus Hellstrøm-Finnsen* på magnuhel@math.ntnu.no med stor takk.

Determinanter (fortsettelse fra sist)

Definisjon: (Rekursiv definisjon) La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise. Hvis $A = [a_{11}]$, defineres *determinanten til* A, $\det(A) = a_{11}$. Tallet, når $n \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

kalles *determinanten* til A og betegnes $\det(A)$.

Eksempel: Utvikling langs første rad:

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\right) = 1\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 9\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}3 & 4\\ 6 & 7\end{vmatrix} - 3 + 12 - 9 = 0$$

Utvikling langs første kolonne:

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\right) = 1\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 9\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix} - 3 + 24 - 21 = 0$$

Observasjon: (Motivasjon for kombinatorisk definisjon av determinanter)

$$\det\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\right) = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ A_{31} & a_{32}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Vi observerer at dette alltid kan skrives som $a_{1?}a_{2?}a_{3?}$. Ser at alle produkter av 3 elementer fra A har et element fra hver rad og et fra hver kolonne. Hva er fortegnene?

Definisjon: En *permutasjon av tallene* $\{1, 2, \dots, n\}$ er en ordning av disse tallene uten utelatelser og repetisjoner.

Observasjon: Antall permutasjoner av tallene $\{1, 2, \dots, n\}$ er $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$.

Eksempel: Permutasjonene til $\{1, 2, 3\}$ er

$$\{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Permutasjon σ	antall inversjoner	like/odde	fortegn $\varepsilon(\sigma)$
(1,2,3)	0	like	$+$
(1,3,2)	1	odde	$-$
(2,1,3)	1	odde	$-$
(2,3,1)	2	like	$+$
(3,1,2)	2	like	$+$
(3,2,1)	3	odde	$-$

Definisjon: (a) Gitt en permutasjon $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ av $\{1, 2, \ldots, n\}$, så sies en *inversjon* å inntreffe hvis $i_j > i_l$ der $j < l$.
(b) Gitt en permutasjon σ, så kalles σ en *like* permutasjon hvis antall inversjoner i σ er et liketall, ellers kalles σ en *odde* permutasjon.
(c) Gitt en permutasjon σ. Fortegnet til σ er $+$ hvis σ er en like permutasjon og $-$ hvis σ er en odde permutasjon. Fortegnet betegnes med $\varepsilon(\sigma)$.

Definisjon/Teorem (Kombinatorisk definisjon av determinant): La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise. Da er

$$\det(A) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \varepsilon(i_1, i_2, \ldots, i_n) a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

hvor $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ løper over alle permutasjoner av $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

da er $\det(A) = -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ med $\varepsilon(1, 3, 2, 4) = -$.

Teorem 28 (2.1.2): La $A = [a_{ij}]$ være en triangulær $n \times n$-matrise. Da er $\det(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$.
Bevis: La A være øvre triangulær. Viser dette med induksjon. For $n = 2$: oppgave. Antar sant for $l < n$, viser for n. Har at,

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}\right) &= a_{11} \det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \\ &= a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}, \end{aligned}$$

Hvor først likheten følger fra utvikling langs første kolonne, og andre fra induksjonssteget. Dermed sant for n og derfor for alle n. $\square$

Egenskaper ved determinanter

Teorem 29 (2.2.2): For en kvadratisk matrise A er $\det(A) = \det(A^T)$.
Bevis: Ved induksjon. Oppgave: vis for 2×2-matriser. Antar at resultatet holder

for $l < n$, og la nå A være en $n \times n$-matrise.

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$
$$\det(A^T) = a_{11}C_{11}(A^T) + a_{21}C_{12}(A^T) + \cdots + a_{n1}C_{1n}(A^T)$$

hvor første ligning følger av utvikling langs 1. rad i A og andre følger av utvikling langs 1. kolonne i A^T. Sjekk selv at: (kofaktormatrisen til a_{1j} i A^T) tilsvarer (kofaktormatrisen til a_{1j} i $A)^T$. Ta for eksempel en 3×3-matrise. Ved induksjon har vi da $C_{j1}(A^T) = C_{1j}(A)$. Dermed $\det(A) = \det(A^T)$. $\square$

Teorem 30 (2.3.1): La A, B, C være $n \times n$-matriser. Hvis $\mathbf{r}_j(A) = \mathbf{r}_j(B) = \mathbf{r}_j(C)$ for $j \neq i$, men slik at $\mathbf{r}_i(C) = \mathbf{r}_i(A) + \mathbf{r}_i(B)$, eller tilsvarende hvis $\mathbf{c}_j(A) = \mathbf{c}_j(B) = \mathbf{c}_j(C)$ for $j \neq i$, men slik at $\mathbf{c}_i(C) = \mathbf{c}_i(A) + \mathbf{c}_i(B)$, da er $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.
Bevis: Vi beviser for radegenskap. Merk at $C_{ij}(A) = C_{ij}(B) = C_{ij}(C)$ for $j = 1, \ldots, n$. Utvikling langs rad i i C gir

$$\begin{aligned}\det(C) &= (a_{i1} + b_{i1})C_{i1} + (a_{i2} + b_{i2})C_{i2} + \cdots + (a_{in} + b_{in})C_{in} \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{li}C_{il}(A) + \sum_{l=1}^{n} b_{li}C_{il}(B) \\ &= \det(A) + \det(B).\end{aligned}$$

Tilsvarende for kolonner (eller bruk Teorem 30). $\square$