NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4115 Matematikk 3**

Faglig kontakt under eksamen: Brynjulf Owren[a], Dag Wessel-Berg[b], Franz Luef[c]

Tlf:

Eksamensdato: 20. mai 2022

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkel kalkulator tillatt. Ingen skrevne eller trykte hjelpemidler.

Annen informasjon:
Faglærer går ikke rundt på eksamen. Bruk telefon for kontakt om eventuelle uklarheter i oppgaveteksten.
Alle oppgaver teller like mye.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Finn alle løsninger av ligninga

$$z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

Oppgave 2 La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, og la V være mengden $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0\}$.

Vis at V er et underrom av $\mathbb{R}^3$, og finn en basis for det ortogonale komplementet $V^\perp$.

Oppgave 3 La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4i & 4-4i \\ i & -2 & 2+i \\ 1+i & -2+2i & 2 \end{bmatrix}.$$

Finn en basis for kolonnerommet (søylerommet) til A, og en basis for nullrommet til A.

Oppgave 4 Bestem om funksjonene

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = \sin(x),$$

er ortogonale i indreproduktsrommet $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, når indreproduktet er definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Hvis ikke, finn en ortogonal basis for det lineære spennet $\mathrm{span}(f_1, f_2, f_3)$ ved å bruke Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetode.

Oppgave 5 Bruk minste kvadraters metode for å finne en tilnærmet løsning på det overbestemte ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= 1 \\ -x + 3y &= 6. \end{aligned}$$

Oppgave 6 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen definert ved

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} - 2\mathbf{x},$$

der $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Finn matrisa A som oppfyller $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

La $\mathcal{B}$ være en basis for $\mathbb{R}^2$ gitt ved $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, og $\mathcal{E}$ være standardbasisen, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Finn matrisa P som oppfyller $P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$.

Finn også matrisa B som oppfyller $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, og vis at $AP = PB$.

Husk: $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *er koordinatvektoren til* $\mathbf{x}$ *med hensyn på basisen* $\mathcal{B}$

Oppgave 7 La A være en reell 3×3-matrise. Vi får oppgitt at

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Bestem egenverdiene til A og tilhørende egenvektorer, og begrunn hvorfor A er diagonaliserbar. Finn så en diagonalisering av A, og beregn

$$A^{2022} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 Vi ser på flytting mellom byene A-by, B-by og C-by. Hvert år blir

- 80% av befolkningen værende igjen i A-by, 15% flytter fra A-by til B-by, og 5% flytter fra A-by til C-by.
- 90% av befolkningen værende igjen i B-by, 5% flytter fra B-by til A-by, og 5% flytter fra B-by til C-by.
- 80% av befolkningen værende igjen i C-by, 10% flytter fra C-by til A-by, og 10% flytter fra C-by til B-by.

Anta det totale innbyggertallet i A-by, B-by og C-by er $100\,000$ og at ingen fødes eller dør.

Hvor mange mennesker bor henholdsvis i A-by, B-by og C-by i det lange løp (når tiden går mot uendelig)?

Oppgave 9 La $x(t)$ og $y(t)$ være to kontinuerlig deriverbare reelle funksjoner, og a et reelt tall. Vi ser på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + ay(t) \\ y'(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Finn den generelle løsningen for systemet av differensialligninger for alle reelle tall a.

Oppgave 10 La $\mathcal{M}_3$ være vektorrommet av reelle 3×3-matriser, og la funksjonen $T : \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_3$ være gitt ved

$$T(A) = A + A^T, \quad \text{for } A \in \mathcal{M}_3,$$

der A^T betegner den transponerte matrisa til A.

Vis at T er en lineærtransformasjon.

Vis at $\lambda = 0$ og $\lambda = 2$ er egenverdier for T.

Hva er de tilhørende egenrommene til disse to egenverdiene, og hva er dimensjonen til hvert av egenrommene? Kan T ha noen andre egenverdier?