



Faglig kontakt under eksamen:  
Idar Hansen 73 59 35 28

## EKSAMEN I FAG SIF5009 MATEMATIKK 3

Onsdag 2. desember 1998

Tid: 0900-1400

Hjelpemidler:

- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, tillatt.
- Karl Rottmann: Matematisk Formelsamling.

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd. Svar tatt rett fra kalkulator godtas ikke som fullgodt svar.

### Oppgave 1

Finn den generelle løsning av

a)  $y'' + y' - 2y = 3e^x - 4x$

b)  $y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos x$ .

c) Bestem konstantene  $a$  og  $b$  slik at alle løsninger av  $y'' + y' - 2y = 0$  også er løsninger av

$$y''' + ay'' + by' - 2y = 0.$$

**Oppgave 2**

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -8 & -13 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

og likningssystemet

$$(*) \quad Ax = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

der  $a$ ,  $b$  og  $c$  er reelle konstanter.

- Avgjør for hvilke  $a$ ,  $b$ ,  $c$  likningssystemet  $(*)$  har løsning.
- Løs  $(*)$  når  $a = -4$ ,  $b = 2$  og  $c = 3$ . Finn en basis for  $\text{Null}(A)$  (nullrommet til  $A$ ).
- Finn en basis for  $\text{Row}(A)$  (radrommet til  $A$ ) og finn en basis for  $\text{Col}(A)$  (kolonne-/søylerommet) til  $A$ .
- Finn en basis for  $\text{Col}(A)^\perp$ . Bruk for eksempel resultatet fra **a**).

**Oppgave 3**

Gitt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Finn egenverdiene og egenvektorene til  $A$ .
- Finn en invertibel matrise  $P$  og en diagonalmatrise  $D$  slik at

$$P^{-1}AP = D.$$

- Finn den generelle løsningen av differensiallikningssystemet

$$(*) \quad x' = Ax.$$

**Oppgave 4**

- a) Bruk Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritme til å finne en ortogonal basis for underrommet  $V \subseteq \mathbb{R}^4$  utspent av vektorene

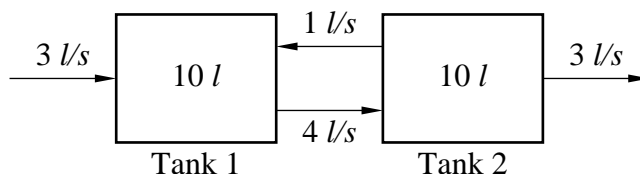
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- b) Finn (den ortogonale) projeksjonen av  $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$  ned på underrommet  $V$ .

**Oppgave 5**

Finn en  $2 \times 2$ -matrise  $A$  slik at differensiallikningssystemet  $x' = Ax$  har generell løsning

$$x = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Oppgave 6**

De to tankene på figuren inneholder 10 liter hver av en oppløsning av salt i vann. Inn i Tank 1 strømmer det rent vann med en rate av 3 liter pr. sekund. Mellom tankene og ut av Tank 2 strømmer det saltoppløsning som vist på figuren med de ratene som er angitt. I hver tank holdes saltet jevnt fordelt ved omrøring.

Ved tiden  $t = 0$  inneholder Tank 1 300 g salt og Tank 2 200 g salt. Finn saltmengdene  $x_1(t)$  og  $x_2(t)$  i de to tankene for alle  $t \geq 0$ .