Kontinuasjonseksamen i TMA4140: Diskret Matematikk, August 2016

Løsningsforslag

Oppgave 1 Den karakteristiske ligningen er

$$r^2 - r - 6 = 0$$, som har røttene -2 og 3.

Altså er den generelle løsningen på formen

$$a_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n, \quad n \geq 0.$$

Setter inn initialbetingelsene:

$$a_0 = 3 = \alpha_1(-2)^0 + \alpha_2 3^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1(-2)^1 + \alpha_2 3^1 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2$$

Dette gir $\alpha_1 = 3/5$ og $\alpha_2 = 12/5$, og vi får løsningen

$$\underline{a_n = 3/5 \cdot (-2)^n + 12/5 \cdot 3^n}$$

Oppgave 2 A kan plukke $\binom{11}{6}$ forskjellige utvalg av 6 bøker. For hver av disse utplukk kan B plukke $\binom{5}{3}$ forskjellige utvalg av 3 bøker av de resterende 5 bøkene. (C vil da nødvendigvis få de 2 gjenværende bøkene.)

Antall forskjellige fordelinger er altså

$$\binom{11}{6} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = \frac{11!}{6!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{2!}{2!\,0!}$$

$$\underline{= 4620}$$

Oppgave 3 a) Ifølge Fermat's teorem er $2^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.
Herav får vi $2^{18m} = (2^{18})^m \equiv 1 \pmod{19}$ for alle m.

$2^9 = 512 = 18 \cdot 28 + 8$. Da får vi

$$2^{2^9} = 2^{18 \cdot 28 + 8} = (2^{18})^{28} \cdot 2^8 \equiv 2^8 = 256 \equiv 9 \pmod{19}$$

Svaret er altså $\underline{x = 9}$

b) Tallene som er delelig med 30 er 0, 30, 60, ⋯, 990, som vi får ved å multiplisere 30 med 0, 1, 2, ⋯, 33. Siden $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ og $4 = 2 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$, så må vi oppsøke de tallene fra 0, 1, 2, ⋯, 33 som ikke er delelig med 2, 3 eller 5.
Disse er 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, og altså er antallet man spør etter lik $\underline{\underline{9}}$

Oppgave 4 Den korteste veien (som man kan finne ved Dijkstras' algoritme) er

a, b, c, f, g, i, k, h, j, m, z

(eller a, b, c, f, h, j, m, z)

som har lengde lik $\underline{\underline{14}}$

Oppgave 5

Basisteget, $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k\cdot k! = 1\cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$$, altså riktig for $n=1$. Anta at

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$$ er sann.

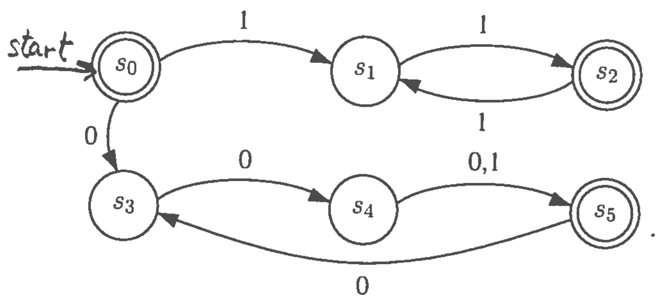
$$\sum_{k=1}^{n+1} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! + (n+1)(n+1)!$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{induksjons-}\\ \text{antagelsen}}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1$$

$$\underline{\underline{= (n+2)! - 1}}$$

Oppgave 6

a)



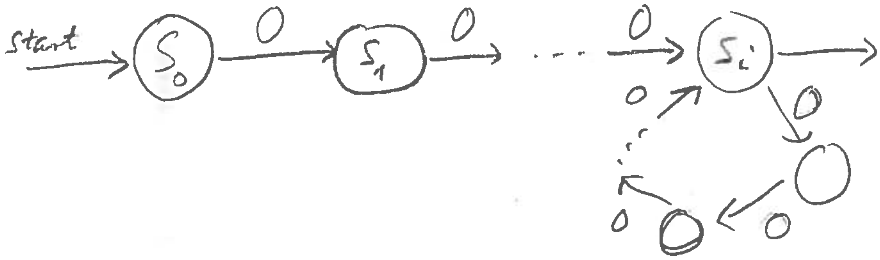
b) $1^* \cup 00^*01^*$

Oppgave 7

Anta at det finnes en endelig tilstandsautomat M som gjenkjenner S, og at M har n noder.

Nå vil M gjenkjenne $\underbrace{0\cdots0}_{n+1}\underbrace{1\cdots1}_{3n+3}$, dvs. ved avlesning av denne ender man i en finaltilstand.

Siden M har n noder så vil man befinne seg i samme node minst to ganger ved avlesning av $\underbrace{0\cdots0}_{n+1}$, se figur:



Det betyr at det finnes en streng av formen $\underbrace{0\cdots0}_{\leq n}\underbrace{1\cdots1}_{3n+3}$ som gjenkjennes av M, og det er i motstrid til at M gjenkjenner S.

Oppgave 8

Den enkleste måten å se at de to grafene ikke er isomorfe er å betrakte komplementgrafene. Komplementgrafen til venstre graf er usammenhengende, mens komplementgrafen til høyre graf er sammenhengende. Altså er de to grafene ikke isomorfe.