Faglig kontakt under eksamen:
Peter Lindqvist, Berit Stensønes (73593520)

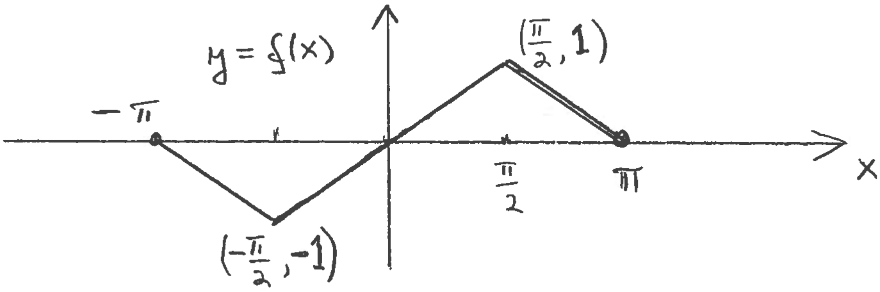
EKSAMEN 1.XII.2012 (Bokmål)
Matematikk 4K TMA 4120

Hjelpemidler: Bestemt kalkulator.
Rottmann:"Matematisk formelsamling"

- **1** Løs ligningen
$$y''(t) + y'(t) = t\,u(t-2)$$
med randverdiene $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Som vanlig er $u(t)$ Heaviside funksjonen.)

- **2** La $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Finn en funksjon $v(x, y)$ slik at
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
er analytisk.

- **3a** Beregn Fourier rekken til funksjonen $f(x)$ med graf



med periode 2π.

- **3b** Løs varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (t > 0,\ 0 \le x \le \pi)$$

med randverdier $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ når $t > 0$, og

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & \text{når} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 2 - \frac{2}{\pi}x, & \text{når} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

- **4** Løs integralligningen

$$y(t) + 4\int_0^t (t-\tau)y(\tau)\,d\tau = 2.$$

Hint: Bruk Laplace transformasjonen.

- **5** Finn Fourier transformasjonen $\hat{g}(\omega)$ av funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{når} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

- **6**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(\theta)}{2 + \sin(\theta)}\,d\theta \quad = \quad ?$$

- **7** Finn alle polene til

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2(z-1)(z+1)}$$

og beregn residuene i polene.

Sensur 3.I.2013

TMA 4120

FORMELLISTE

Laplacetransformasjonen:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a)) = e^{-as} \quad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s), \quad u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t > a \end{cases} \quad (a \geq 0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)\,du\right) = \mathcal{L}(f(t))\cdot\mathcal{L}(g(t))$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) \qquad \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}f(t)\right) = \int_s^\infty F(u)\,du$$

Fouriertransformasjonen:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx, \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(w)e^{iwx}\,dw$$

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(x)) = (iw)^n\hat{f}(w) \qquad \mathcal{F}((-ix)^nf(x)) = \hat{f}^{(n)}(w)$$

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x)) = \hat{f}(w-a) \qquad \mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-iaw}\hat{f}(w)$$

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x-u)\,du\right) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-w^2/4a}, \quad \text{a reell og positiv.}$$