MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2020

Løsningsskisse øving 7

Oppgave 1

Paraboloiden $z = x^2 + y^2$ kan parametriseres i vanlige koordinater (x, y) som

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k},$$

der $x, y \in \mathbb{R}$. Skriver vi om til polarkoordinater får vi $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og $z = x^2 + y^2 = r^2$, og dermed er en altenativ parametrisering gitt ved

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\mathbf{i} + r\sin\theta j + r^2\mathbf{k},$$

for $r \geq 0$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Oppgave 2

Vi husker fra side 261 i læreboka at kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ kan parametriseres i kulekoordinater som

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = R\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + R\sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + R\cos\phi\mathbf{k},$$

der $0 \leq \phi \leq \pi$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$. I dette tilfellet er $R = 4$, og vi er kun interessert i den delen av kuleflaten som ligger i første oktant. Denne flaten kan parametriseres som

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 4\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + 4\sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + 4\cos\phi\mathbf{k},$$

der $0 \leq \phi \leq \pi/2$ og $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

Oppgave 3

Sirkelen $x^2 + z^2 = 4$ i xz-planet kan parametriseres som

$$\tilde{\mathbf{r}}(\theta) = 2\cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\theta\mathbf{k},$$

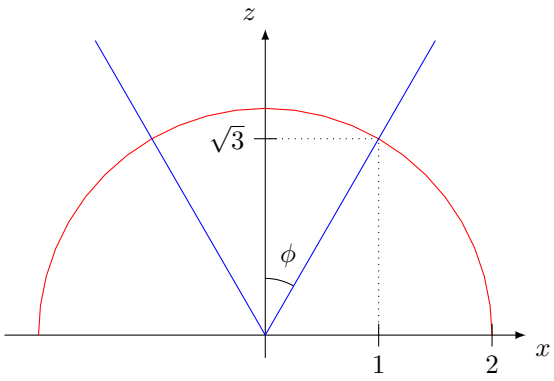
der $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sylinderflaten gitt ved $x^2 + z^2 = 4$ og $0 \leq y \leq 1$ kan derfor parametriseres som

$$\mathbf{r}(\theta, y) = 2\cos\theta\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2\sin\theta\mathbf{k},$$

der $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq y \leq 1$.

Oppgave 4

Denne flaten er enklest å parametrisere i kulekoordinater, men dette forutsetter at vi finner vinkelen $\phi \leq \pi/2$ hvor kuleskallet $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ skjærer kjeglen $z^2 = 3(x^2 + y^2)$. Ved å sette uttrykkene for z^2



Figur 1: Skjæringskurvene mellom planet $y = 0$ (for $z \geq 0$) og henholdsvis kjeglen (i blått) og kuleskallet (i rødt). Vi ser at de to skjæringskurvene skjærer hverandre i $x = 1$, $z = \sqrt{3}$. Dermed er $\sin\phi = 1/2$, og følgelig er $\phi = \pi/6$.

lik hverandre, finner vi at skjæringskurven er gitt ved $x^2 + y^2 = 1$ og $z = \sqrt{3}$. Dette svarer til vinkelen $\phi = \pi/6$ (se Figur 1 for en grundigere forklaring av dette). Dermed er

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + 2\sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + 2\cos\phi\mathbf{k}$$

for $0 \leq \phi \leq \pi/6$ og $0 \leq \theta \leq 2\pi$ én mulig parametrisering av flaten.

Oppgave 5

Vi har at $\mathbf{F}(0,0) = (1,-2)$, samt at

$$\mathbf{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{som gir} \quad \mathbf{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da determinanten $\det \mathbf{F}'(0,0) = -1 \neq 0$, er $\mathbf{F}'(0,0)$ inverterbar, og det følger av omvendt funksjonsteorem (Setning 5.7.2 i læreboka) at det finnes en funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $(1,-2)$ slik at $\mathbf{G}(1,-2) = (0,0)$ og

$$\mathbf{G}'(1,-2) = \mathbf{F}(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har også $\mathbf{F}(-1,-1) = (1,-2)$ og

$$\mathbf{F}'(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Igjen ser vi at determinanten $\det \mathbf{F}'(-1,-1) = 1 \neq 0$, og det følger av omvendt funksjonsteorem at det

finnes en funksjon $\mathbf{H}$ definert i en omegn om $(1,-2)$ slik at $\mathbf{H}(1,-2)=(-1,-1)$ og

$$\mathbf{H}'(1,-2)=\mathbf{F}'(-1,-1)^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Oppgave 6

Funksjonen

$$F(x,y)=x^3+y^3+y-1$$

har kontinuerlige partiellderiverte, og spesielt har vi at

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=3y^2+1>0 \quad \text{ i alle punkter } (x,y).$$

Det følger derfor av implisitt funksjonsteorem (s. 487 i læreboka) at det for ethvert punkt (x_0,y_0) på kurven $F(x,y)=0$ finnes en omegn U_0 om x_0 og en deriverbar funksjon $f:U_0\to\mathbb{R}$ slik at $F(x,f(x))=0$ for alle $x\in U_0$. Videre er

$$f'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}=-\frac{3x_0^2}{1+3y_0^2}.$$

Oppgave 7

Funksjonen $f(x,y,z)=xy^2e^z+z$ oppfyller $f(-1,2,0)=-4$, og vi ser derfor på

$$F(x,y,z)=xy^2e^z+z+4.$$

Funksjonen F har kontinuerlige partiellderiverte, og

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=xy^2e^z+1.$$

Spesielt har vi at

$$\frac{\partial F}{\partial z}(-1,2,0)=-3\neq 0,$$

og det følger derfor av implisitt funksjonsteorem at det finnes en omegn U_0 om $(-1,2)$ og en deriverbar funksjon $g:U_0\to\mathbb{R}$ slik at $F(x,y,g(x,y))=0$ for alle $(x,y)\in U_0$. Videre er

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,2)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(-1,2,0)}=-\left.\frac{y^2e^z}{xy^2e^z+1}\right|_{(-1,2,0)}=\frac{4}{3},$$

og

$$\frac{\partial g}{\partial y}(-1,2)=-\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(-1,2,0)}=-\left.\frac{2xye^z}{xy^2e^z+1}\right|_{(-1,2,0)}=-\frac{4}{3}.$$

Oppgave 8

Vi antar at de partiellderiverte av ϕ eksisterer. Om vi partiellderiverer begge sider av ligningen $\phi(x,y(x))=C$ med hensyn på x, får vi ifølge kjerneregelen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y(x))y'(x)=0.$$

Løser vi denne ligningen for $y'(x)$, ser vi at

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))},$$

forutsatt at $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$.

Oppgave 9

Vi innfører funksjonen

$$\mathbf{F}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - u^2 + v^2 \\ 2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 \end{pmatrix},$$

og observerer at $\mathbf{F}(2, -1, 2, 1) = (0, 0)$. Vi undersøker derfor om vi kan anvende vektorvaluert versjon av implisitt funksjonsteorem. Alle partiellderiverte av F_1 og F_2 er kontinuerlige, og spesielt har vi at

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u, v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{pmatrix}.$$

Denne matrisa er inverterbar dersom det $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u, v} = -24uv^3 + 8uv \neq 0$, og i punktet $(2, -1, 2, 1)$ er det $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u, v}(2, -1, 2, 1) = -48 + 16 = -32$. Altså er betingelsene for implisitt funksjonsteorem oppfylt, og det finnes en omegn U_0 om $(x_0, y_0) = (2, -1)$ og en deriverbar funksjon $\mathbf{G} : U_0 \to \mathbb{R}^2$ (som sender (x, y) til $(u(x, y), v(x, y))$) slik at $\mathbf{F}(x, y, \mathbf{G}(x, y)) = (0, 0)$ for alle $(x, y) \in U_0$. Vi har at

$$\mathbf{G}'(2, -1) = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u, v}(2, -1, 2, 1)\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x, y}(2, -1, 2, 1)\right),$$

og finner derfor

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x, y} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x + 2y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x, y}(2, -1, 2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

og

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u, v}(2, -1, 2, 1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Dermed er

$$\mathbf{G}'(2, -1) = -\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

og vi leser ut av Jacobimatrisa at

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2, -1) = \frac{13}{8} \quad \text{og} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(2, -1) = \frac{5}{4}.$$

Oppgave U • **Skritt 1:** Vi viser først at en avbildning $\mathbf{L} : \bar{B}(\mathbf{0}, r) \to \mathbb{R}^m$ som ikke avviker for mye fra identitetsavbildningen $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ er injektiv og avbilder $\bar{B}(\mathbf{0}, r)$ på en verdimengde V_L som inneholder $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$. Dette er Lemma 5.7.9: Hvis $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{H}(\mathbf{x})$, der $\mathbf{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ og

$$|\mathbf{H}(\mathbf{u}) - \mathbf{H}(\mathbf{v})| \leq \frac{1}{2}|\mathbf{u} - \mathbf{v}| \quad \text{for alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \bar{B}(\mathbf{0}, r), \tag{1}$$

så er $\mathbf{L}$ injektiv og $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2) \subset V_L$.

i) Injektivitet av $\mathbf{L}$ følger direkte fra (1).

ii) At $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2) \subset V_L$ er en konsekvens av Banachs fikspunktteorem. (Mer utfyllende: For en $\mathbf{y} \in \bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$, la $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x})$. Funksjonen $\mathbf{K}$ avbilder $\bar{B}(0, \mathbf{r})$ inn i $\bar{B}(\mathbf{0}, r)$ og er på grunn av (1) en kontraksjon. Altså finnes en entydig $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ slik at $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.)

- **Skritt 2:** Vi viser at omvendt funksjonsteorem gjelder for en funksjon $\mathbf{L}$ hvor

$$\mathbf{L}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad \mathbf{L}'(\mathbf{0}) = I_m. \tag{2}$$

Dette er Lemma 5.7.10: Vi antar at $\mathbf{L} : U \to \mathbb{R}^m$ (der $\mathbf{0} \in U$) har kontinuerlige partiellderiverte og oppfyller (2). Da finnes en $r > 0$ slik at $\mathbf{L}$ restriktert til $\bar{B}(\mathbf{0}, r)$ er injektiv og har en omvendt funksjon $\mathbf{M}$ definert på et område som inneholder $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$. Videre er $\mathbf{M}$ deriverbar i $\mathbf{0}$ og $\mathbf{M}'(\mathbf{0}) = I_m$.

i) Vi innfører funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, og viser at denne oppfyller betingelsene i Lemma 5.7.9. Fra definisjonen har vi at $\mathbf{H}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ og $\nabla H_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ for alle i. Videre følger det fra middelverdisetningen og kontinuiteten av H_i's partiellderiverte at det finnes en $r > 0$ slik at

$$|\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{for alle } |\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| < r.$$

Altså er betingelsene i Lemma 5.7.9 oppfylt, og det følger at funksjonen $\mathbf{L}$ restriktert til $\bar{B}(\mathbf{0}, r)$ er injektiv og $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2) \subset V_L$. Dette betyr at $\mathbf{L}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{M}$ definert på et område som inneholder $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$.

ii) At funksjonen $\mathbf{M}$ er deriverbar i $\mathbf{0}$ og $\mathbf{M}'(\mathbf{0}) = I_m$ betyr at

$$\lim_{|\mathbf{y}| \to 0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) - \mathbf{M}(\mathbf{0}) - I_m\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} = \lim_{|\mathbf{y}| \to 0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Vi verifiserer dette ved å betrakte $\mathbf{y} \in \bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$. For slike $\mathbf{y}$ finnes en entydig $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ slik at $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x})$ og $\mathbf{x} = \mathbf{M}(\mathbf{y})$. Dermed er

$$\lim_{|\mathbf{y}| \to 0} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{y}) - \mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} = -\lim_{|\mathbf{y}| \to 0} \frac{\mathbf{L}(\mathbf{x}) - I_m\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y}|}.$$

Vi ser så nærmere på produktet på høyre side i ligningen over. Fordi $|\mathbf{y}| = |\mathbf{L}(\mathbf{x})| \geq |\mathbf{x}|/2$, går $|\mathbf{x}| \to 0$ når $|\mathbf{y}| \to 0$, og faktoren $|\mathbf{x}|/|\mathbf{y}|$ er begrenset. Hvis vi også bruker at $\mathbf{L}'(\mathbf{0}) = I_m$, ser vi at første faktor i produktet går mot $\mathbf{0}$ når $|\mathbf{y}| \to 0$. Dette bekrefter (3).

- **Skritt 3:** Til slutt viser vi at et enkelt variabelskifte gir omvendt funksjonsteorem for det generelle

tilfellet. Vi skal altså vise at for $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^m$ (der $\bar{\mathbf{x}} \in U$) med kontinuerlige partiellderiverte og inverterbar Jacobi-matrise $\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})$ finnes det en delmengde $U_0 \subset U$ om $\bar{\mathbf{x}}$ slik at $\mathbf{F} : U_0 \to V_F$ er injektiv. Videre skal vi se at verdimengden V_F er en omegn om $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})$, og at den omvendte funksjonen $\mathbf{G} : V_F \to U_0$ er deriverbar i $\bar{\mathbf{y}}$ med Jacobi-matrise

$$\mathbf{G}'(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})^{-1}. \tag{4}$$

i) Vi innfører funksjonen

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{F}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \bar{\mathbf{y}}),$$

der $A = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})^{-1}$. Denne funksjonen vil oppfylle betingelsene i Lemma 5.7.10, så det finnes en $r > 0$ slik at $\mathbf{L}$ restriktert til $\bar{B}(\mathbf{0}, r)$ har en invers funksjon $\mathbf{M}$ hvis definisjonsmengde inneholder $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$. Det følger fra dette og definisjonen av $\mathbf{L}$ at

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \bar{\mathbf{y}} \tag{5}$$

er injektiv på $\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, r)$. Altså har $\mathbf{F}$ restriktert til $\bar{B}(\bar{\mathbf{x}}, r)$ en invers funksjon $\mathbf{G}$.

ii) Vi finner $\mathbf{G}$ ved å sette $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ i (5) og løse ligningen for $\mathbf{x}$. Dette gir

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{M}(A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})). \tag{6}$$

Siden definisjonsmengden til $\mathbf{M}$ inneholder $\bar{B}(\mathbf{0}, r/2)$, inneholder definisjonsmengden til $\mathbf{G}$ kula $\bar{B}(\bar{\mathbf{y}}, r/(2|A|))$. Altså er $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $\bar{\mathbf{y}}$.

iii) Til slutt bruker vi deriverbarhet av $\mathbf{M}$ og kjerneregelen på ligning (6) for å slå fast at

$$\mathbf{G}'(\mathbf{y}) = \mathbf{M}'(A(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}))A.$$

Setter vi inn $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$, $\mathbf{M}'(\mathbf{0}) = I_m$ og $A = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})^{-1}$, får vi nettopp (4).