Eksamen TMA4140 – Diskret matematikk August 2009

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ Formelen er riktig for $n = 1$. Anta at formelen er riktig for $n = k$, altså

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Legg til $\frac{1}{(k+1)(k+2)} \left(= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$ på begge sider. Da får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= 1 - \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+2} \\ &= 1 - \frac{1}{(k+1)+1}.\end{aligned}$$

Da har vi vist at formelen gjelder for $n = k + 1$ dersom vi antar at den gjelder for $n = k$. Siden formelen gjelder for $n = 1$ så gjelder den for alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ved induksjon.

$\boxed{2}$ $M = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$; $M_1 = \frac{M}{3} = 20$, $M_2 = \frac{M}{4} = 15$, $M_3 = \frac{M}{5} = 12$.

$$\left.\begin{aligned} 20 \cdot y_1 &\equiv 1 \mod 3 \\ 15 \cdot y_2 &\equiv 1 \mod 4 \\ 12 \cdot y_3 &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= 3 \\ y_3 &= 3 \end{aligned}$$

Løsningen av $(*)$ er da, for $k \in \mathbb{Z}$,

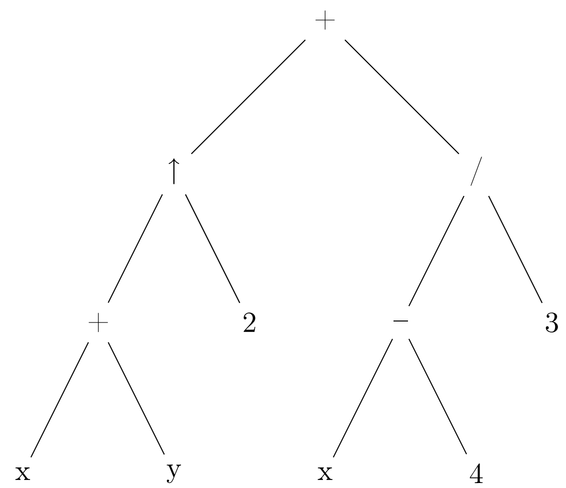
$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot 20 \cdot 2 + 1 \cdot 15 \cdot 3 + 3 \cdot 12 \cdot 3 + k \cdot 60 \\ &= 233 + k \cdot 60 \\ &= 53 + k \cdot 60. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ **a)** u_3 og u_6 må avbildes i v_2 og v_6 ved en eventuell isomorfi (siden disse nodene er av grad 3). Siden u_3 og u_6 har en felles nabonode, men v_2 og v_6 ikke har det, så kan ikke grafene være isomorfe.

b) G_1 har en Hamiltonkrets a, b, c, d, e, a (og enhver Hamiltonkrets kan gjøres om til en Hamiltonsti ved å fjerne en vilkårlig kant). G_2 og G_3 har ingen Hamiltonkrets siden de inneholder noder av grad 1 (hvis man går til den noden på et tidspunkt, vil man måtte gå tilbake via samme kant, men da vil noden man kom fra bli besøkt to ganger). Siden G_3 inneholder mer enn to noder av grad 1, kan den heller ikke ha noen Hamiltonsti (samme argument her, bortsett fra at de to endepunktene i stien kan ha grad 1). Derimot har G_2 en Hamiltonsti: a, b, c, d.

4 **a)** jnopkefbclmghida

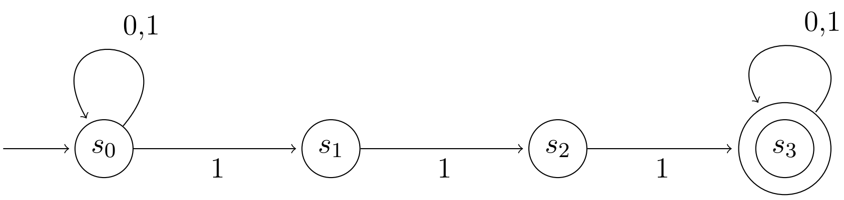
b)



5 **a)**

$$L(M_3) = \{0^n,\ 0^n 10x \mid n = 0, 1, 2, \ldots, \text{ der } x \text{ er en vilkårlig streng}\} = (\mathbf{0}^* \cup \mathbf{0}^*\mathbf{10}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*).$$

b)



6 **a)** 3071

b) $(11110001)_2$

c)

$$3^4 \cdot (-2)^7 \binom{11}{4} = 3^4 \cdot (-2)^7 \binom{11}{7} = -3421440.$$

7 **a)** Tautologi (sees ved sannhetstabell).

b) De er ikke logisk ekvivalente, siden dersom $P(x)$ er en utsagnsfunksjon som noen ganger er sann og noen ganger usann, og dersom $Q(x)$ er en utsagnsfunksjon som alltid er usann, så er $\forall x(P(x) \to Q(x))$ usann, mens $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ er sann.