**Oppgåve 1** • Rekn ut ein basis for kolonnerommet og nullrommet til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & -1 & 12 \\ -2 & 6 & 0 & -4 \\ 4 & -12 & -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

• Bestem òg $\dim \operatorname{Null}(A^\top)$.

**Oppgåve 2** Finn løysinga av systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

som oppfyller vilkåra $x_1(0) = 1$ og $x_2(0) = 5$.

**Oppgåve 3** Bestem alle dei komplekse løysingane til likninga

$$z^3 - 3z^2 + 6z - 4 = 0.$$

Skriv løysingane på polar form. *Hint: Klarar du å sjå éin løysing direkte?*

**Oppgåve 4** • Berekn determinanten til

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

• Kor mange løysingar har likningssystemet

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} ?$$

(Grunngje svaret.)

**Oppgåve 5** • Avgjer om polynoma

$$p(t) = 2 - t, \qquad q(t) = 1 + t^2 \qquad \text{og} \qquad r(t) = 1 + 2t - 3t^2$$

er lineært uavhengige eller ikkje i $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, vektorrommet av reelle andregradspolynom.

• Finn så ut om $p$ og $q$ står ortogonalt på kvarandre med omsyn på indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{2} f(k)g(k), \qquad f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

**Oppgåve 6** Bestem generell løysing til differensiallikninga

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2t} - 36t.$$

**Oppgåve 7** Ein ortogonal basis for kolonnerommet til matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

er gjeve som $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, kor

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Rekn ut projeksjonen av $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ned på $\operatorname{Col} A$. (Svaret skal bli $\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$.)
- Finn minste-kvadratsløysinga til det overbestemte ligningssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

**Oppgåve 8** To ulike ordna basisar for $\mathbb{R}^2$ er $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ og $\mathscr{C} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$, kor

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Ein vektor har koordinatar $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ med omsyn på basis $\mathscr{B}$. Kva er koordinatane til denne vektoren i standardbasisen?
- Bestem basisbyttematrisa fra $\mathscr{C}$ til $\mathscr{B}$.

**Oppgåve 9** La $T\colon V \to W$ vere ein lineærtransformasjon mellom to vektorrom $V$ og $W$ og la $U$ vere eit underrom av $V$. Vis at

$$T(U) = \{T(u) \mid u \in U\}$$

er eit underrom av $W$.

**Oppgåve 10** La $A \neq 0$ vere ei $n \times n$-matrise kor $A^3 = 0$. Vis at $I - A$ er ei inverterbar matrise. *Hint: Ei matrise $B$ er inverterbar om det finst ei matrise $C$ slik at $BC = I = CB$.*