NTNU

Bølger I: Form og regularitet

Johannes Røsok Eskilt   Veileder: Mats Ehrnström

January 30, 2017

Oppgaven tar for seg Korteweg-de Vries likningen,

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 u + 3\frac{\partial}{\partial x}u^2 = 0 \tag{0.1}$$

som beskriver vannbølger når forholdet mellom bølgelengden og vanndybden er stor [1].

1 Deriverbarheten til løsningen

Vi skal først vise at hvis u er to ganger deriverbar, så er den også uendelig ganger deriverbar. Går man utifra en bølge med konstant form og hastighet, kan likningen reduseres til en ordinær differensiallikning ved å sette $X = x - ct$ der c er bølgehastigheten. Den nye likningen blir

$$-c\frac{\partial}{\partial X}u + \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^3 u + 3\frac{\partial}{\partial X}u^2 = 0. \tag{1.1}$$

Ved å integrere blir likningen

$$-cu + u_{XX} + 3u^2 = c_1, \tag{1.2}$$

der c_1 er integreringskonstanten. Når $X \to \pm\infty$, går $u \to 0$ og $u_{XX} \to 0$. Da må $c_1 = 0$ og vi får

$$u_{XX} = cu - 3u^2. \tag{1.3}$$

Hvis u er to ganger deriverbar, må også $cu - 3u^2 = u_{XX}$ være det. Vi må da sjekke om dette stemmer generelt for

$$u^{(2n+2)} = cu^{(2n)} - 3(u^{(2n)})^2, \tag{1.4}$$

hvor n er et heltall større eller lik 0. Hvis dette gjelder for n, må det også gjelder for $n \to n+1$.

$$u^{(2n+4)} = cu^{(2n+2)} - 3(u^{(2n+2)})^2 \tag{1.5}$$

Høyresiden av likhetstegnene er gitt som deriverbar, og dermed må også venstresiden være det. Konklusjonen er dermed at løsningen u er uendelig ganger deriverbar gitt at den er to ganger deriverbar.

2 Perturbasjonsteori

Vi skal nå se på om ligningen (1.3) kan approksimeres med perturbasjoner både for periodiske og ikke-periodiske løsninger.

2.1 Jevn, 2π-periodiske løsninger

Vi kan utvikle både bølgehastigheten c og løsingen u ved bruk av perturbasjonsteori. ε er en liten parameter $0 < \varepsilon \ll 1$ som brukes i en rekkeutvikling av både c og u. Vi starter med $u(X) = u_0(X) + u_1(X)\varepsilon$ og $c = c_0 + c_1\varepsilon$. Ligning (1.3) blir da

$$u_{0_{XX}} + u_{1_{XX}}\varepsilon = c_0u_0 + c_0u_1\varepsilon + c_1u_0\varepsilon + c_1u_1\varepsilon^2 - 3u_0^2 - 6u_0u_1\varepsilon - 3u_1\varepsilon^2. \tag{2.1}$$

Ved å la $\varepsilon \to 0$ ender vi bare opp med ligning (1.3). Vi er interessert i små løsninger til (1.3). Derfor bruker vi uttrykk (1.3) med $u_0 = 0$.

$$u_{1_{XX}} = c_0u_1 + c_1u_1\varepsilon - 3u_1\varepsilon \tag{2.2}$$

Så lar vi $\varepsilon \to 0$, og uttrykket blir

$$u_{1_{XX}} = c_0u_1. \tag{2.3}$$

Periodiske løsninger til u_1 er på formen

$$u_1 = \mathrm{A}\sin(\sqrt{-c_0}X) + \mathrm{B}\cos(\sqrt{-c_0}X). \tag{2.4}$$

Vi er bare interessert i jevne, 2π-periodiske løsninger og setter derfor A= 0, B= 1 og $c_0 = -1$. Dette gir $u_1 = \cos(X)$. Hadde vi derimot valgt en positiv c_0, hadde løsningen blitt ikke-periodisk.
Videre er andreordens pertubasjon $u(X) = u_0(X) + u_1(X)\varepsilon + u_2(X)\varepsilon^2$ og $c = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2$. Der $u_0 = 0$, $c_0 = -1$ og $u_1 = \cos(X)$. Ligning (1.3) blir da

$$\begin{aligned} -\cos(X)\varepsilon + u_{2_{XX}}\varepsilon^2 &= -\cos(X)\varepsilon - u_2\varepsilon^2 + c_1\cos(X)\varepsilon^2 + c_1u_2\varepsilon^3 \\ &+ c_2\cos(X)\varepsilon^3 + c_2u_2\varepsilon^4 - 3\cos(X)^2\varepsilon^2 - 6\cos(X)u_2\varepsilon^3 - 3u_2^2\varepsilon^4. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Hvis vi deler (2.5) på ε^2 og lar $\varepsilon \to 0$ får vi

$$u_{2_{XX}} = -u_2 + c_1\cos(X) - 3\cos(X)^2. \tag{2.6}$$

Som gir løsningen

$$u_2 = \frac{1}{2}c_1 X\sin(X) + a_1\sin(X) + a_2\cos(X) + \frac{1}{2}\cos(2X) - \frac{3}{2}. \tag{2.7}$$

Enkel, jevn, 2π periodisk løsning får vi ved å sette $c_1 = 0$, $a_1 = 0$ og $a_2 = 0$.

$$u_2 = \frac{1}{2}\cos(2X) - \frac{3}{2} \tag{2.8}$$

2.2 Ikke-periodiske løsninger

Den generelle ikke-periodiske løsningen [1] til (1.3) er

$$u(X) = \frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}X\right)}. \tag{2.9}$$

Ved å sette inn for $c = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ bør vi kunne asymptotisk utvikle oss fram til $u(X) = u_0(X) + u_1(X)\varepsilon + u_2(X)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$ for ikke-periodiske løsninger. Ved å gjøre dette får vi

$$\frac{c}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}X\right)} = \left(c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c_0}}{2}X\right)} + \frac{\sinh\left(\sqrt{c_0}X\right)Xc_1}{4\sqrt{c_0}\cosh^4\left(\frac{\sqrt{c_0}X}{2}\right)}\varepsilon + \right. \tag{2.10}$$

$$\left.\left(\frac{\sinh\left(\sqrt{c_0}X\right)X\left(\frac{c_2}{2\sqrt{c_0}} - \frac{c_1^2}{8c_0^{3/2}}\right) + \cosh\left(\sqrt{c_0}X\right)X^2\frac{c_1^2}{8c_0}}{4\cosh^4\left(\frac{\sqrt{c_0}X}{2}\right)} + \frac{\sinh^2\left(\sqrt{c_0}X\right)X^2c_1^2}{8c_0\cosh^6\left(\frac{\sqrt{c_0}X}{2}\right)}\right)\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)\right).$$

Det første leddet blir altså

$$u_0 = \frac{c_0}{2\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c_0}X}{2}\right)}, \tag{2.11}$$

som er den generelle ikke-periodiske løsningen til (0.1) med $c = c_0$. Hvis vi velger å bare se på små bølgeløsninger, setter vi $c_0 = 0$. Da får vi

$$\frac{c}{2\cosh^2(\frac{\sqrt{c}}{2}X)} = \frac{1}{2}c_1\varepsilon + \left(\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{8}c_1^2X^2\right)\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right). \tag{2.12}$$

Dette viser at det er mulig å rekkeutvikle bølgehastigheten c og løsningen u i en liten parameter for å finne små bølger for både periodiske og ikke-periodiske løsninger.

3 MONOTONE BØLGELØSNINGER

Oppgaven nå er å vise at i én minimal periode, er de små bølgeløsningene strengt monotone fra sin ene bølgedal til sin ene bølgetopp. Den 2π-periodiske løsningen for (1.3) er

$$u(X) = \cos(X)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{3.1}$$

som gir den deriverte

$$u'(X) = -\sin(X)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{3.2}$$

Vi fortsetter med å anta at $O(\varepsilon^2)$ er i C^2, altså at den deriverte og andrederiverte eksisterer og er kjent.
Først ser vi på intervallet $X \in [-\pi+\delta, -\delta]$ for $0 < \delta \ll 1$. Per definisjon tilsvarer $f(\varepsilon) = O(\varepsilon^k) \iff |f| \leq B|\varepsilon^k|$ for en stor nok konstant B. Derfor vil følgende ulikhet gjelde

$$u'(X) = \varepsilon(-\sin(X) + O(\varepsilon)) \geq m_\delta\varepsilon + O(\varepsilon^2) \geq m_\delta\varepsilon - B\varepsilon^2 = \varepsilon B\left(\frac{m_\delta}{B} - \varepsilon\right) \geq \frac{m_\delta}{2}\varepsilon. \tag{3.3}$$

Der $m_\delta = \min(-\sin(X)) > 0$, og vi har valgt B slik at $\varepsilon < \frac{m_\delta}{2B}$. Vi ser dermed også at utregningen er uavhengig av $u_2(x)$.
Så må vi se på intervallene $X \in [-\pi, -\pi+\delta]$ og $X \in [-\delta, 0]$. Siden vi krever at de 2π-periodiske løsningene skal være jevne, så vil $u'(x) = 0$ for $x = k\pi$ der $k \in \mathbb{Z}$. Dermed vil bølgeløsningene være strengt monotone fra sin ene bølgedal til sin ene bølgetopp hvis $u''(X) < 0$ der $X \in [-\delta, 0]$ og $u''(X) > 0$ der $X \in [-\pi, -\pi+\delta]$.

$$u''(X) = -\cos(X)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{3.4}$$

I intervallet $X \in [-\pi, -\pi+\delta]$ gjelder

$$u''(X) = \varepsilon(-\cos(X) + O(\varepsilon)) \geq k_\delta\varepsilon + O(\varepsilon^2) \geq \frac{k_\delta}{2}\varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Der $k_\delta = \min(-\cos(X)) > 0$ og samme argumentasjon som i (3.3) gjelder. I intervallet $X \in [-\delta, 0]$ gjelder derfor også

$$u''(X) = \varepsilon(-\cos(X) + O(\varepsilon)) \leq \frac{b_\delta}{2}\varepsilon < 0, \tag{3.6}$$

der $b_\delta = \max(-\cos(X)) < 0$. Dermed får vi resultatet vi skulle vise.

4 REFERANSE

[1] Brauer, K. (2014) The Korteweg de Vries Equation: History, exact Solutions and graphical Representation. https://www.usf.uni-osnabrueck.de/uploads/media/KdV.pdf