NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke

Tlf: 73 59 81 26, 990 41 673

Eksamensdato: august 2016

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller skrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s).

Annen informasjon:
I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

La $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Finn egenverdiene til A og en ortonormal basis for hvert av egenrommene.

b) Finn en matrise P som er slik at $P^{\mathrm{T}}AP$ er diagonal. Hva er $P^{\mathrm{T}}AP$ lik?

c) Finn tre lineært uavhengige egenvektorer for A som også er egenvektorer for

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finn en invertibel matrise Q som er slik at både $Q^{-1}AQ$ og $Q^{-1}BQ$ er diagonal.

Oppgave 2

La P_2 være det reelle vektorrommet av alle polynomer av grad mindre enn eller lik 2. Vi definerer et indreprodukt på P_2 ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

for alle $f(x)$, $g(x) \in P_2$ (du trenger ikke vise at dette er et indreprodukt) og lar

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$$

for alle $f(x) \in P_2$.

a) Finn en ortogonal basis for P_2.

b) Finn det ortogonale komplementet til underrommet $\operatorname{span}\{1, x\}$ av P_2.

c) Finn polynomet $f(x) \in \operatorname{span}\{1, x\}$ som er nærmest polynomet x^2 i den forstand at $\|x^2 - f(x)\|$ er minst mulig. Tegn en grov skisse av grafene til $y = f(x)$ og $y = x^2$ i samme koordinatsystem.

Oppgave 3

La V være underrommet med basis $\mathcal{B} = \{1, \cos, \sin\}$ av vektorrommet av alle reelle funksjoner definert på $\mathbb{R}$, der 1 er funksjonen som konstant er lik 1, cos er cosinus og sin er sinus. La D være lineæroperatoren på V definert ved at $D(f) = f'$ (den deriverte av f).

a) Finn matrisen $[D]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ til D med hensyn på $\mathcal{B}$.

b) Finn en basis for kjernen (nullrommet) til D. Hva er rangen til D ($\operatorname{rank} D$)? Er 0 en egenverdi til D?

Oppgave 4

En maurkoloni har fordelt seg på to tuer, A og B. Til enhver tid vil 90 % av maurene som sist overnattet i tue A også overnatte der neste natt, mens 10 % av dem tilbringer neste natt i tue B. Av maurene som sist overnattet i tue B, flytter 50 % over til tue A neste natt, mens 50 % blir værende i tue B.

Hvor mange prosent av maurene er det i hver av de to tuene etter mange netter?

Oppgave 5

La A være en kompleks kvadratisk matrise. Vis at A er hermitisk hvis og bare hvis A er unitært diagonaliserbar og A bare har reelle egenverdier.