NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1202/MA6202 Lineær algebra med anvendelser

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke

Tlf: 73 59 81 26, 990 41 673

Eksamensdato: 31. mai 2016

Eksamenstid (fra–til): 9.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller skrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt kalkulator (Casio fx-82ES Plus, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College eller HP 30s).

Annen informasjon:
I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

La $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Finn egenverdiene til A og en ortonormal basis for hvert av egenrommene.

b) Finn en matrise P som er slik at $P^{\mathrm{T}}AP$ er diagonal. Hva er $P^{\mathrm{T}}AP$ lik?

c) Finn en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for A, men som ikke er en ortogonal basis.

Oppgave 2

La P være det reelle vektorrommet av alle polynomer. Vi definerer et indreprodukt på P ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

for alle $f(x)$, $g(x) \in P$ (du trenger ikke vise at dette er et indreprodukt) og lar

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle}$$

for alle $f(x) \in P$. Betrakt underrommet $V = \operatorname{span}\{1, x^2, x^3\}$ av P.

Det oppgis at $\int_{-1}^{1} x^t dx = 0$ for $t = 1, 3, 5, \ldots$ og at $\int_{-1}^{1} x^t dx = 2/(t+1)$ for $t = 0$, $2, 4, \ldots$.

a) Finn et reelt tall c slik at basisen $\{1, x^2 - c, x^3\}$ for V er ortogonal. (Du trenger ikke vise at dette er en basis for V uansett verdi av c.)

b) Finn polynomet $f(x) \in V$ som er nærmest polynomet x i den forstand at $\|x - f(x)\|$ er minst mulig. Tegn en grov skisse av grafene til $y = f(x)$ og $y = x$ i samme koordinatsystem.

Oppgave 3

La t være et reelt tall.

a) Vis at $\mathcal{B} = \{(1,0,t),(0,1,t),(-t,0,1)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$, uansett verdien av t.

La $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved at $T(x,y,z) = (x+y,z)$ for alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (du trenger ikke vise at dette er en lineærtransformasjon), og la $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ være standardbasisen til $\mathbb{R}^2$.

b) Finn en basis for kjernen (nullrommet) til T. Hva er rangen til T ($\operatorname{rank} T$)? Finn matrisen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ til T med hensyn på $\mathcal{B}$ og $\mathcal{E}$.

En lineærtransformasjon $S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er gitt ved at $[S]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Hva blir $[T \circ S]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$? For hvilke t er $T \circ S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ énentydig (1–1, injektiv)?

Oppgave 4

La skrivemåten $\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ bety at alle elementene i vektoren $\boldsymbol{v}$ er større enn eller lik 0. Vi har n fabrikker som selger varer til hverandre og til markedet utenom fabrikkene. La $\boldsymbol{x}$ være en vektor som på plass i har totalt salg fra fabrikk i. La $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ være en vektor som på plass i har salg fra fabrikk i til markedet. La C være $n \times n$-matrisen der alle elementene på hoveddiagonalen er 0, og som har alle andre elementer lik $1/n$. Vi antar en åpen økonomisk Leontief-modell som sier $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$.

Er vi garantert at det fins en $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ som gjør at $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$, uansett hva $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ er? Finn $\boldsymbol{x}$ når $n = 3$ og

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 100\,000 \\ 100\,000 \\ 100\,000 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 5

La A være en kvadratisk reell matrise. Vis at A er symmetrisk hvis og bare hvis $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$ og A bare har reelle egenverdier. (Vink: Du kan bruke, uten å bevise det, at A er unitært diagonaliserbar hvis $A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$.)