TMA4240 Statistikk
Høst 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Innlevering 2

Dette er den andre av tre innleveringer i blokk 1. Denne øvingen skal oppsummere pensum forelest de fire første forelesningsukene. Spesielt er det i denne innleveringen fokus på sannsynlighetsfordelinger, forventningsverdi og varians. For å få godkjent innleveringen kreves det at minimum 40% av svarene er riktige, og at det kommer fram at det er gjort et ærlig forsøk på 75% av oppgavene. Alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1

Simultanfordelingen, $f(x, y)$, til de to diskrete stokastiske variablene X og Y er gitt i følgende tabell:

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$x = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$x = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

Finn marginalfordelingen $g(x)$ til X og marginalfordelingen $h(y)$ til Y, og beregn forventning og varians til X og til Y.

Beregn kovariansen mellom X og Y, $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Er X og Y uavhengige? Svaret skal begrunnes.

Oppgave 2

En person kaster en terning og holder på til han første gang får et resultat han har fått før. La X betegne antall kast og finn fordelingen til X.

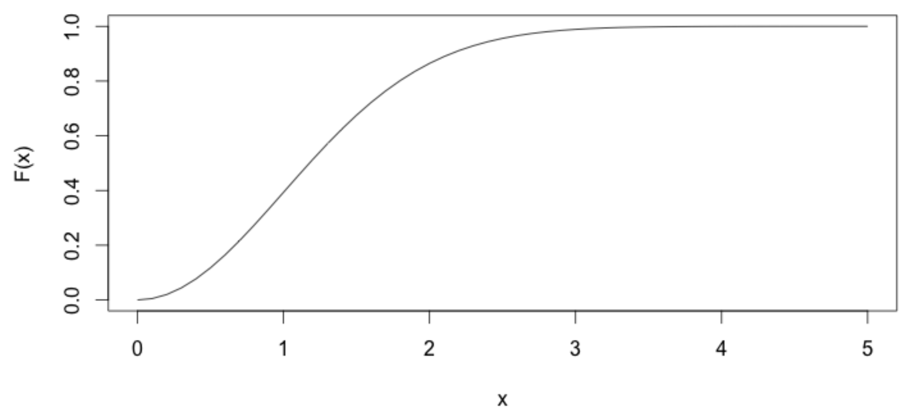
Oppgave 3

La den tilfeldige variabelen X beskrive i hvor lang tid en komponent har fungert i det den blir ødelagt. Vi kaller X for *levetiden* til komponenten.

Levetiden (målt i år), X, til en bestemt type mekaniske komponenter har vist seg å følge en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjon gitt ved

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{2\alpha}\right\} \quad ; \quad x > 0$$

der α er en parameter som beskriver kvaliteten til komponentene. Den kumulative fordelingsfunksjonen er vist i Figur 1, for tilfellet $\alpha = 1$. Fra figuren ser vi for eksempel at det svært sannsynlig at en komponent slutter å fungere i løpet av fem år.

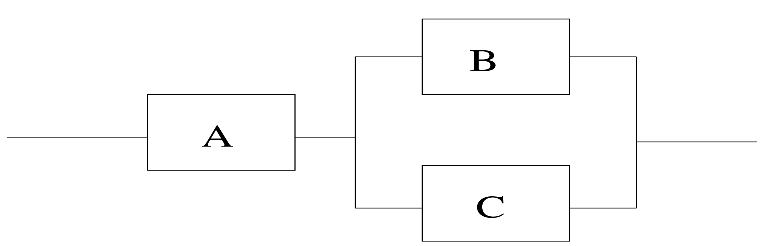


Figur 1: Kumulativ fordelingsfunksjon for levetid X

a) Bestem sannsynlighetstettheten til X.

Bestem for hvilken verdi av x sannsynlighetstettheten $f(x)$ tar sitt maksimum. Skisser $f(x)$.

Et instrument inneholder tre komponenter av denne typen, alle med samme kvalitetsparameter α. Vi refererer til de tre komponentene som komponenter A, B og C. Det antas at de tre komponentene svikter uavhengig av hverandre. Komponentene inngår i instrumentet slik at instrumentet kun vil fungere så lenge komponent A og minst en av komponentene B og C fungerer. Dette kan illustreres med følgende figur.



La følgende fire hendelser være definert:

A: Komponent A fungerer fremdeles etter to år.

B: Komponent B fungerer fremdeles etter to år.
C: Komponent C fungerer fremdeles etter to år.
D: Instrumentet fungerer fremdeles etter to år.

b) Tegn inn hendelsene A, B og C i et Venn-diagram.

Skraver hendelsen D i Venn-diagrammet.

For $\alpha = 1$, finn sannsynligheten for at instrumentet fremdeles fungerer etter to år.

Oppgave 4

Det skal tas blodprøve av samtlige soldater i en militæravdeling for å finne ut om noen er smittet av en bestemt sykdom. Sannsynligheten for at blodprøven fra en tilfeldig valgt soldat er positiv (dvs. at han er smittet) antas å være lik p, og testresultatene for ulike individer antas å være uavhengige.

Man går frem på følgende måte: Blodprøver tas av $k(> 1)$ soldater om gangen, blodprøvene blandes og blandingen analyseres. Hvis den gir positiv reaksjon, noe som betyr at minst en av soldatene er smittet, tas nye blodprøver av de k, og prøvene analyseres enkeltvis. Hvis blandingen gir negativ reaksjon, blir det ikke tatt flere prøver.

a) Begrunn hvorfor antall smittede i en k-gruppe er binomisk fordelt og vis at sannsynligheten for at en blanding av k blodprøver skal gi positiv reaksjon er

$$1 - (1 - p)^k.$$

b) Hvordan defineres betinget sannsynlighet for en hendelse A gitt en annen hendelse B? Soldat 19 Haugen får beskjed om at hans k-gruppe har vist positiv reaksjon. Hva er da sannsynligheten for at han er positiv?

c) Anta at en avdeling består av m grupper, hver med k soldater, slik at det totale antallet soldater er mk. La X være antall blodprøver som må analyseres før hele avdelingen er ferdig kontrollert. Vis at

$$E(X) = mk\left(1 + \frac{1}{k} - (1 - p)^k\right).$$

Hvis $k = 4$, for hvilke verdier av p er den benyttede fremgangsmåten å foretrekke i stedet for å analysere blodprøvene enkeltvis med en gang?

Fasit

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{1}{6}$

3. a) $\alpha^{1/2}$ **b)** 0.034

4. b) $p/(1 - (1 - p)^k)$ **c)** $p < 1 - (1/2)^{(1/2)} \approx 0.29$