TMA4240 Statistikk
Høst 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 6

Denne anbefalte øvinga tar utgangspunkt i pensum i sjette uke med forelesninger. Oppgavene handler om kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger, særlig normal- og eksponentialfordelingene.

Oppgave 1

Ut fra statistiske materiale over lengre tid har et flyselskap erfaring for at 7 prosent av samtlige passasjerer ikke kommer til bestilt avgang. For bedre å utnytte flysetekapasiteten tar derfor flyselskapet flere bestillinger enn det er plasser på flyene - såkalt overbooking. I det følgende skal vi se på effekten av dette for et Boeing 747 fly med 243 seter.

a) Anta at en tar imot n plassbetillinger på flyet. La X være antall passasjerer som virkelig møter til avgang. Under hvilke forutsetninger er X binomisk fordelt med

$$\mathrm{E}(X) = 0.93n \qquad \mathrm{Var}(X) = 0.0651n.$$

I det følgende kan du der det er hensiktsmessig, bruke at X er tilnærmet normalfordelt med forventning og varians som nettopp angitt.

b) Anta at en overbooker med 12 seter, altså at en tar imot 255 plassbestillinger. Hva er da sannsynligheten for at alle passasjerene som møter til avgang får plass?

Hvor stor overbooking kan en maksimalt gjøre hvis en ønsker en sannsynlighet minst 0.99 for at alle passasjerene skal få plass?

c) Hvis en passasjer ikke får plass på grunn av overbooking, får han en erstatning på 4000 kroner av flyselskapet. Anta på den annen side at flyselskapet taper 1000 kroner for hver ledige plass som ikke utnyttes. Selskapet ønsker å beregne forventet tap dersom det *ikke* overbookes. Hva blir forventet tap for en avgang hvis det tas nøyaktig 243 bestillinger? Anta så at flyselskapet velger en overbooking-strategi slik at det tas imot 255 bestillinger. Sett opp et uttrykk for forventet tap for flyselskapet i dette tilfellet. (Utregning kreves ikke).

Oppgave 2

Vis at eksponensialfordelingen er "glemsk" (har ingen hukommelse), dvs. vis at

$$P(X \geq t+s | X > s) = P(X \geq t) \quad \forall\ s,t > 0.$$

Vis tilsvarende for geometrisk fordeling, dvs. vis at

$$P(X \geq t + s | X > s) = P(X \geq t) \quad \forall\, s, t > 0.$$

Oppgave 3

Første del i terningspillet *Yatzy* består i å oppnå, i tur og orden, så mange 1'ere, 2'ere, ..., 6'ere som mulig i løpet av seks omganger. Det er til rådighet 5 terninger der hver terning kan kastes inntil 3 ganger i hver omgang. Noen kaller denne varianten *tvungen*–Yatzy.

I omgang nummer en, skal det samles på 1'ere. Antall poeng som spilleren oppnår i omgangen er lik antall øyne på de oppnådde 1'erene, dvs $1 \times$ antall 1'ere. I omgang nummer to, skal det samles på 2'ere. Antall poeng som spilleren oppnår i omgangen er lik antall øyne på de oppnådde 2'erene, dvs $2 \times$ antall 2'ere. Dette forsetter i fire omganger til, der det i omgang nummer 6 samles på 6'ere. Etter seks omganger summeres antall oppnåde poeng. Dersom antall poeng er 63 eller flere, får spilleren en *bonus* som er på 50 poeng.

a) La oss studere én av de fem terningene som kastes i omgang nummer en. Terningen kastes inntil tre ganger og spilleren avslutter dersom en 1'er blir oppnådd. Vi definerer hendelsene (for $k = 1, 2$ og 3)

$A_k =$ "terningen viser en 1'er i kast nummer k",

og de tilhørende komplementærhendelsene A_k^C. La B være hendelsen

B = "spilleren oppnår en 1'er med inntil tre kast".

Uttrykk B og B^C ved hjelp av A_k, $k = 1, 2$ og 3. Vis at

$$\mathrm{P}(B) = \frac{91}{216} \approx 0.42,$$

uten å bruke komplementærsetningen. Beregn deretter $\mathrm{P}(B^C)$ uten å bruke komplementærsetningen.

La X_1 være antall 1'ere spilleren får i omgang nummer en. La $f_{X_1}(x_1)$ være den diskrete tettheten til X_1.

b) Forklar hvorfor X_1 er binomisk fordelt. Hva er $\mathrm{P}(X_1 = 5)$ og $\mathrm{P}(X_1 \geq 3)$?

La X_2 være antall 2'ere i omgang nummer to, X_3 være antall 3'ere i omgang nummer tre, osv. La Y være antall poeng spilleren oppnår etter seks omganger,

$$Y = \sum_{i=1}^{6} i\, X_i\, .$$

c) Hva er forventing og varians til Y? Vi kan tilnærme fordelingen til Y med en normalfordeling. Hva er (den tilnærmede) sannsynligheten for å oppnå bonus?

Oppgave 4

X er kontinuerlig fordelt med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Finn sannsynlighetsfordelingen til

a) $U = X - 2$

b) $V = -2X$

c) $W = X^2$

Fasit

1. **b**) 0.925, 8 **c**) Ingen overbooking: kr. 17010

3. **b**) $\mathrm{P}(X_1 = 5) = 0.013$, $\mathrm{P}(X_1 \geq 3) = 0.353$ **c**) 44.1, 10.53^2, 0.040