TMA4240 Statistikk
Høst 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 5

Denne øvingen er satt sammen med utgangspunkt i den delen av pensum som gjennomgås i femte forelesningsuke. Oppgavene dreier seg i hovedsak om diskrete sannsynlighetsfordelinger.

Oppgave 1

Antall tankskip X som ankommer til en bestemt havn i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med $\mathrm{E}(X) = 2$. Havnen kan maksimalt betjene 3 tankskip pr. dag. De tre første ankomne blir ekspedert, eventuelle øvrige blir omdirigert til annen havn.

a) Hvilke(t) antall tankskip har størst sannsynlighet for å ankomme en bestemt dag? Hvor stor er sannsynligheten for at det en bestemt dag må dirigeres tankskip til andre havner?

b) Hva er forventet antall skip som blir betjent en bestemt dag?

c) Hvor stor kapasitet må havnen bygges ut til for med minst 90% sannsynlighet å kunne betjene samtlige skip som ankommer en gitt dag?

Oppgave 2

En bedrift har kjøpt 10 PC'er av et bestemt merke, og vil vurdere behovet for vedlikeholdsavtale på disse. De regner med at feil som oppstår kan være av to typer: feil som man kan utbedre selv (A feil) og feil som krever assistanse fra merkeleverandør (B feil). La X være antall A feil og Y antall B feil på en tilfeldig valgt PC i løpet av t år. Vi skal gå ut fra at A feil og B feil er uavhengige, at alle PC'ene feiler uavhengige av hverandre, og at X og Y er poissonfordelte,

$$f_X(x) = \frac{(0.25t)^x e^{-0.25t}}{x!} \text{og} f_Y(y) = \frac{(0.15t)^y e^{-0.15t}}{y!}$$

a) Hva er forventet antall A feil på en tilfeldig valgt PC i løpet av 4 år? Finn sannsynligheten for at tallet på A feil på en PC i samme tidsrom skal være 3 eller større.

b) La N_X være samlet tall på A feil og la N_Y være samlet tall på B feil for alle 10 PC-ene over et visst tidsrom. Forklar hvorfor N_X og N_Y er poissonfordelte. Hvilken punktsannsynlighet får disse?

c) La Z være antall PC-er som er feilfrie i 4 år. Hvilken fordeling får Z? Begrunn svaret. Finn $P(Z > 2)$. La A' være når det ikke skjer A feil på en PC i et visst tidsrom, og B' når det ikke skjer B feil på samme PC i samme tidsrom. Er A' og B' uavhengige? Er de disjunkte? Begrunn svarene.

d) La V være tallet på PC-er det oppstår feil på i løpet av 4 år. Hvilken fordeling får V? Finn ved regning et uttrykk for korrelasjonskoeffisienten mellom V og Z og gi en intuitiv forklaring av svaret.

Oppgave 3

Vi ser på dødsfall om natten ved sykehjemmet "Aftensol". Ved sykehjemmet er det tre sykepleiere i rene nattevaktstillinger, Anne, Bernt og Cecilie. Hver natt er en av dem på vakt gjennom hele natten, og det er da ingen andre ansatte tilstede ved hjemmet. Anne jobber i 100% nattevaktstilling, mens Bernt og Cecilie jobber i 50% nattevaktstillinger.

Vi ser på en tilfeldig valgt natt og definerer følgende hendelser:

$A =$ Anne er på vakt,
$B =$ Bernt er på vakt,
$C =$ Cecilie er på vakt,
$D =$ det skjer et dødsfall.

Anta at alle dødsfall er naturlige. Det er da rimelig å gå ut fra at sannsynligheten for dødsfall er den samme uansett hvilken sykepleier som er på vakt, dvs. at $P(D|A) = P(D|B) = P(D|C)$. Anta at den felles verdi for disse er 0.06.

a) Tegn de 4 hendelsene definert ovenfor i et venndiagram.

Hva er sannsynlighetene $P(A), P(B)$ og $P(C)$?

Finn $P(D)$. Er hendelsene D og C uavhengige? Begrunn svaret.

I den siste tiden har det vært 10 dødsfall om natten ved sykehjemmet, og hele 7 av disse har skjedd når Cecilie har vært på vakt. Det er derfor satt igang etterforskning for eventuelt å avdekke om Cecilie har noe med dødsfallene å gjøre.

Anta i det følgende at alle dødsfallene er naturlige, og at de har skjedd på forskjellige netter.

La X være en stokastisk variabel som beskriver antall av $n = 10$ naturlige dødsfall som skjer på Cecilies vakter.

b) Forklar hvorfor det kan antas at X er binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 0.25$. (Det er ikke tilstrekkelig å skrive opp de generelle forutsetningene for en binomisk fordeling, betingelsene må relateres direkte til situasjonen som er beskrevet.)

Hva er sannsynligheten for at 7 eller flere av 10 dødsfall om natten skjer på Cecilies vakter?

La oss tenke oss at det rundt om på sykehjem i Norge jobber 300 andre sykepleiere i tilsvarende stilling som Cecilie. Hva er sannsynligheten for at minst en av de 300 sykepleierne opplever at 7 eller flere av 10 naturlige dødsfall skjer på sine vakter?

Gir svarene i dette punktet grunn til å styrke mistanken mot Cecilie? Begrunn svaret.

Oppgave 4

Forklar i hvilke situasjoner den hypergeometriske fordeling kan tilnærmes med den binomiske fordeling, og i hvilke situasjoner den binomiske fordeling kan tilnærmes med en Poisson fordeling.

Oppgave 5

Antall trykkfeil, N, i et manuskript på s sider, antas å være en poissonfordelt stokastisk variabel med parameter λs, dvs.

$$P(N=n) = \frac{(\lambda s)^n}{n!}\exp(-\lambda s), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En korrekturleser som leser korrektur på manuskriptet antas å oppdage hver trykkfeil med sannsynlighet p og ikke oppdage trykkfeilen med sannsynlighet $1-p$. La X være antall feil korrekturleseren finner dersom han leser igjennom manuskriptet en gang. Vi skal anta at X gitt $N{=}n$ er binomisk fordelt,

$$P(X=x|N=n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

a) Hvilken betingelse må vi i tillegg anta dersom vår antagelse om at $X|N{=}n$ er binomisk fordelt, skal være korrekt?

Dersom $\lambda = 2$ og manuskriptet er på $s = 8$ sider, hva er da sannsynligheten for at antall trykkfeil er større enn 10?

Dersom vi vet at manuskriptet inneholder 12 trykkfeil og at $p = 0.6$, hva er da sannsynligheten for at korrekturleseren vil finne alle trykkfeilene?

La Y_k være antall trykkfeil som gjenstår etter at korrekturleseren har lest igjennom manuskriptet k uavhengige ganger ($k = 1, 2, \ldots$), dvs. Y_1 er antall trykkfeil som gjenstår etter en gjennomlesning.

b) Finn simultanfordelingen til Y_1 og N, og bruk den til å finne (marginal)fordelingen til Y_1. Hva er fordelingen til Y_k?

Fasit

1. **a**) 1 eller 2, 0.143 **b**) 1.782 **c**) 4

2. **a**) 1, 0.0803 **c**) 0.328

3. **a**) P(D)=0.06 **b**) 0.004, 0.7

5. **a**) P($N > 10$)=0.923, P(finner alle feil) = 0.0022 **b**) $Y_k \sim$ Poisson($\lambda s(1-p)^k$)