TMA4240 Statistikk
Høst 2019

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Anbefalt øving 3

Disse oppgavene passer til pensum i tredje uke med forelesninger, og dreier seg om tilfeldige variable og sannsynlighetsfordelinger.

Oppgave 1

La X være en diskret fordelt stokastisk variabel med utfallsrom $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Punktsannsynlighetene for hvert utfall er gitt i følgende tabell

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.1	0.5	0.2	0.1

Regn ut forventningsverdien til X.

Bestem sannsynlighetene

$$\mathrm{P}(X \geq 0) \qquad \text{og} \qquad \mathrm{P}(X \geq 0 | X \leq 1).$$

Oppgave 2

La X være en kontinuerlig fordelt stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{for } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der k er en konstant.

Bestem k slik at $f(x)$ er en gyldig sannsynlighetstetthet, og skisser $f(x)$.

Beregn sannsynlighetene $\mathrm{P}(X \leq 0.6)$ og $\mathrm{P}(X \leq 0.8 | X > 0.6)$.

Oppgave 3

La X og Y være diskret fordelte stokastiske variabler der $X, Y \in \{0, 1, 2\}$. La $f(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ være simultan punktsannsynlighet for X og Y og anta at $f(x, y)$ er som angitt i følgende tabell.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0.10	0.25	0.15
1	0.06	0.15	0.09
2	0.04	0.10	0.06

a) Finn $\mathrm{P}(X > Y)$.

Finn (marginal) punktsannsynlighet for X og for Y.

Er X og Y uavhengige? Begrunn svaret!

Oppgave 4

I denne oppgaven kan du bruke uten å vise det at

$$\int_0^\infty x^r e^{-ax} dx = \frac{r!}{a^{r+1}} \text{ når } a > 0 \text{ og } r \text{ er et heltall} \geq 0$$

Vi betrakter ankomst- og oppholdstider for et bestemt lokaltog på en jernbanestasjon. Toget skal etter rutetabellen ankomme hver hverdag klokka 8:00, men kommer alltid etter dette tidspunktet.

La X (minutter) betegne togets forsinkelse på en tilfeldig valgt hverdag. Vi antar at X er en stokastisk variabel med sannsynlighetstetthet

$$g(x) = \begin{cases} kxe^{-2x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

der $k > 0$ er en konstant.

a) Vis at $k = 4$.

Hva er den forventede forsinkelse for toget?

Vis at sannsynligheten for at toget er mer enn 2 minutter forsinket er tilnærmet lik 0.09.

La Y (minutter) være den tiden toget står på stasjonen. Oppholdstiden Y vil være influert av forsinkelsen, og vi antar at den betingede sannsynlighetstetthet $f(y|x)$ for Y, gitt at forsinkelsen X er lik x (> 0), er gitt ved

$$f(y|x) = \begin{cases} (x/2)\, e^{-xy/2} & \text{for } y > 0 \\ 0 & \text{for } y \leq 0 \end{cases}$$

b) Hvilken fordeling har oppholdstiden Y når det er gitt at forsinkelsen er 2 minutter?

Hva er forventet oppholdstid når forsinkelsen er 2 minutter?

Sett opp simultantettheten $f(x, y)$ for X og Y.

Finn sannsynlighetstettheten $h(y)$ for oppholdstiden Y.

Fasit

1. $0.1, 0.8, 0.78$

2. 0.75, 0.896, 0.728

3. a) 0.2, X og Y er uavhengige