MA1202 EKSAMEN VÅR 2012
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1(a). Radredusering gir at A er radekvivalent med trappematrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

men dette er bare én av mange muligheter. Det er to frie variabler:

$$\begin{aligned} x_3 &= s \\ x_4 &= t, \end{aligned}$$

og da gir andre rad at

$$\begin{aligned} x_2 &= -3x_3 - x_4 \\ &= -3s - t, \end{aligned}$$

mens første rad gir

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - 10x_3 - 4x_4 \\ &= -3(-3s - t) - 10s - 4t \\ &= -s - t. \end{aligned}$$

Nullrommet til matrisen A er derfor gitt som vektorrommet

$$\{\begin{bmatrix} -s-t \\ -3s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{s \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

En basis for nullrommet blir da

$$\{\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}.$$

Siden nullity(A) = 2 og matrisen har fire kolonner, gir dimensjonsteoremet at rank(A) = 2. Vi har et resultat som sier at rank(A) = rank(A^{T}), og siden A^T også har fire kolonner gir dimensjonsteoremet for den matrisen at nullity(A^{T}) = 2. **Oppsummert: både rangen og nulliteten til A^T er** 2.

Oppgave 1(b). Trappematrisen i oppgave 1(a) har ledende koeffisienter i første og andre kolonne. Da har vi et resultat som sier at første og andre kolonnevektor i matrisen A danner en basis for kolonnerommet til A. **En basis for kolonnerommet til A blir da**

$$\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

Oppgave 2. Det er flere måter å gjøre denne på. Den enkleste er nok å benytte følgende resultat: hvis vi har n vektorer i $\mathbb{R}^n$, så er de lineært uavhengige hvis og bare hvis matrisen de danner som kolonnevektorer er inverterbar, dvs. har determinant ulik null. Derfor:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \text{ er lin. uavh.} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \cdot ((-3) \cdot a - 1 \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot a - 0 \cdot 1) + 0 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-3)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -3a^2 - 3a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(a+1) \neq 0. \end{aligned}$$

Dette betyr at de tre vektorene er lin. uavh. for alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Oppgave 3(a). Vi følger hintet og viser at $f(x)$ og $g(x)$ er ortogonale:

$$\begin{aligned}\langle f(x), g(x)\rangle &= f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1) \\ &= 0\cdot 1 + 4\cdot(-4) + 2\cdot 8 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Følgelig utgjør mengden $\{f(x), g(x)\}$ en ortogonal basis for underrommet W av P_2. Da har vi et resultat som sier at $\mathrm{proj_W h(x)}$ er gitt ved

$$\mathrm{proj_W h(x)} = \frac{\langle \mathrm{f(x), h(x)}\rangle}{\|\mathrm{f(x)}\|^2}\mathrm{f(x)} + \frac{\langle \mathrm{g(x), h(x)}\rangle}{\|\mathrm{g(x)}\|^2}\mathrm{g(x)}$$

hvor $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle$. For å regne ut alt dette trenger vi å vite verdiene til de tre funksjonene for $x = 0, 1, -1$:

$$\begin{array}{lll} f(0)=0 & g(0)=1 & h(0)=1 \\ f(1)=4 & g(1)=-4 & h(1)=3 \\ f(-1)=2 & g(-1)=8 & h(-1)=1 \end{array}$$

De fire indreproduktene vi trenger blir da

$$\begin{aligned}\langle f(x), h(x)\rangle &= 14 \\ \langle f(x), f(x)\rangle &= 20 \\ \langle g(x), h(x)\rangle &= -3 \\ \langle g(x), g(x)\rangle &= 81\end{aligned}$$

Projeksjonen av $h(x)$ ned på underrommet W er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}\mathrm{proj_W h(x)} &= \frac{14}{20}f(x) + \frac{(-3)}{81}g(x) \\ &= \frac{7}{10}(x+3x^2) - \frac{1}{27}(1-6x+x^2) \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{83}{90}x + \frac{557}{270}x^2.\end{aligned}$$

Oppgave 3(b). Det er fire krav til et indreprodukt, og en del av det siste kravet er at ekvivalensen

$$\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = 0$$

skal gjelde for alle $p(x) \in P_2$. Ta nå polynomet

$$p(x) = (x-3)(x-4) = 12 - 7x + x^2$$

i P_2. Da har vi:

$$\begin{aligned}p(x) &\neq 0 \\ \langle p(x), p(x)\rangle &= 0\end{aligned}$$

siden $p(3) = 0 = p(4)$. **Derfor er dette ikke et indreprodukt på P_2.**

Oppgave 4(a). La $\left[\begin{smallmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{smallmatrix}\right]$ være en tilfeldig vektor i $\mathbb{R}^3$. **Da er**

$$\left[\begin{smallmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{smallmatrix}\right] = T\left(\begin{pmatrix} r_1 & 0 & r_1 \\ r_2 & r_3 & r_2 \end{pmatrix}\right),$$

så transformasjonen er surjektiv. Siden

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

er det ikke slik at transformasjonen alltid sender ulike vektorer på ulike vektorer. **Derfor er den ikke injektiv.**

Oppgave 4(b). For å minske notasjonen, kaller vi vektorene i basisen $\mathcal{B}$ for v_1, v_2, v_3, v_4 (i samme rekkefølge som i $\mathcal{B}$). Videre kaller vi vektorene i basisen $\mathcal{B}'$ for w_1, w_2, w_3 (i samme rekkefølge som i $\mathcal{B}'$). Da er matrisen $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ gitt ved

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [(T(v_1))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_2))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_3))_{\mathcal{B}'} \mid (T(v_4))_{\mathcal{B}'}] .$$

Vi må altså ta hver v_i, og skrive $T(v_i)$ som en lineærkombinasjon av vektorene w_1, w_2, w_3 i basisen $\mathcal{B}'$:

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -w_2 + w_3 \\
T(v_2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= -w_2 + w_3 \\
T(v_3) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= w_1 + w_2 - w_3 \\
T(v_4) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -w_1 + w_3
\end{aligned}$$

Koordinatvektorene $(T(v_i))_{\mathcal{B}'}$ er derfor gitt ved

$$\begin{aligned}
(T(v_1))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(T(v_2))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
(T(v_3))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
(T(v_4))_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nå har vi kolonnevektorene i matrisen $[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, så vi får

$$[T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Oppgave 5. Siden A er diagonaliserbar finnes det en inverterbar (kvadratisk) matrise P og en (kvadratisk) diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Antagelsen i oppgaven gir

$$PDP^{-1} = A = A^4 = PD^4P^{-1},$$

og ved å multiplisere med P^{-1} fra venstre og P fra høyre får vi likheten

$$D = D^4.$$

Men matrisen D er en diagonalmatrise, så ethvert element λ som står på diagonalen må tilfredsstille

$$\lambda = \lambda^4.$$

Dette medfører at $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$, og for begge disse mulighetene gjelder $\lambda = \lambda^2$. **Men da gjelder også likheten $D = D^2$, som gir**

$$A = PDP^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2.$$