LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1202/MA6202 VÅR 2011

Oppgave 1. **(a)** Vi radreduserer matrisen på en måte som er gyldig for alle t (vi unngår å dele noe sted på et uttrykk som inneholdet t, for å unngå å dele på null):

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & t & 1+2t \\ 1 & 1 & 2t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}
&\overset{R1-2R2,R3-tR2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & t-2 & 1-2t \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & -t & 1-2t^2 \end{pmatrix} \\
&\overset{R1+R3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2-2t-2t^2 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & -t & 1-2t^2 \end{pmatrix} \\
&\overset{-R1/2,-R3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & t & 2t^2-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{R3-tR2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 1 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & -t^3+t^2+t-1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2t \\ 0 & 1 & t^2+t-1 \\ 0 & 0 & -t^3+t^2+t-1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Nå er matrisen på trappeform. Fra det ser vi at rangen er tre så lenge polynomet

$$-t^3+t^2+t-1$$

ikke er null, og to hvis dette polynomet er null. Tallet 1 er en rot, så $(t-1)$ er en faktor i polynomet. Polynomdivisjon gir da

$$-t^3+t^2+t-1 = -(t-1)(t^2-1) = -(t+1)(t-1)^2.$$

Røttene i polynomet er derfor ± 1. Dette gir:

$$
\begin{aligned}
t \neq \pm 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{rang} = 3 \text{ og nullitet} = 0 \\
t = \pm 1 \quad &\Rightarrow \quad \text{rang} = 2 \text{ og nullitet} = 1
\end{aligned}
$$

(Husk at nulliteten er antall kolonner minus rangen.)

(b) Ved å bytte om ligning to og tre ser vi at koeffisientmatrisen til ligningssystemet er den samme som i **(a)**. Dvs. at ligningssystemet kan skrives på matriseform som

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor A er matrisen fra **(a)**. Hvis $t \neq \pm 1$ vet vi at A har rang 3, og siden A er en 3×3-matrise må den da være inverterbar. Da har systemet en løsning, nemlig

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Da gjenstår de to tilfellene $t = \pm 1$. For $t = -1$ er systemet løsbart, mens for $t = 1$ er det ikke løsbart (sjekk selv). Konklusjon: systemet er løsbart for alle $t \neq 1$.

Oppgave 2. Kolonnerommet er vektorrommet utspent av de tre kolonnevektorene

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bruk Gram-Schmidt på disse.

Oppgave 3. Anta vi har en lineærkombinasjon

$$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n = 0.$$

Vi må vise at alle skalerene da er null. Hvis vi tar en hvilken som helst av vektorene v_i, får vi

$$0 = \langle 0, v_i \rangle = \langle r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n, v_i \rangle = r_1 \langle v_1, v_i \rangle + \cdots + r_n \langle v_n, v_i \rangle = r_i \langle v_i, v_i \rangle.$$

Her har vi brukt regneregler for indreprodukt, samt at vektorene er ortogonale. Siden vektorene er ikke-trivielle er $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, så eneste mulighet er $r_i = 0$. Vi har nå vist at den eneste lineærkombinasjonen av vektorene som gir nullvektoren, er den hvor alle skalarene er trivielle. Derfor er vektorene pr. definisjon lineært uavhengige.

Oppgave 4. **(a)** Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 0 & 3 \\ -1 & \lambda - \pi & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 5)(\lambda - \pi)(\lambda - 1) + 3(\lambda - \pi) \\
&= (\lambda - \pi)\left[(\lambda - 5)(\lambda - 1) + 3\right] \\
&= (\lambda - \pi)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\
&= (\lambda - \pi)(\lambda - 4)(\lambda - 2).
\end{aligned}$$

Her gjaldt det å ikke stupe ned i beregningene og få et tredjegradspolynom: vi ser jo tidlig at $(\lambda - \pi)$ er en faktor. Egenverdiene er altså:

$$\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2.$$

For hver egenverdi λ må vi finne en tilhørende egenvektor v, dvs en ikke-triviell vektor i nullrommet til matrisen $\lambda I - A$.

$\lambda_1 = \pi$:

$$\begin{aligned}
\pi I - A &= \begin{pmatrix} \pi - 5 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \pi - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_1 &= \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned}
4I - A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 - \pi & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 - \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3/(4-\pi) \\ 1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$\lambda_3 = 2$:

$$\begin{aligned}
(-2)I - A &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 - \pi & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 - \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
v_3 &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/(2-\pi) \\ 1 \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Dette gir

$$D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3/(4-\pi) & 1/(2-\pi) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det finnes mange andre (uendelig mange) egenvektorer (alle skalarmultiplum av de over), så matrisen P er ikke unik. Dessuten er ikke rekkefølgen på kolonnene unik, hverken i D eller P (men egenverdiene/egenvektorene må korrespondere).

(b) Matrisen A er koeffisientmatrisen, dvs. systemet kan skrives som

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \\ h' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

Da vil egenverdiene og egenvektorene løse systemet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} &= C_1 v_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 v_3 e^{\lambda_3 x} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pi x} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3/(4-\pi) \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/(2-\pi) \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}. \end{aligned}$$

Her er C_1, C_2, C_3 ubestemte koeffisienter.

Oppgave 5. (a) La v betegne vektoren $3v_1 - 8v_3$. Pr. definisjon er da koordinatvektoren gitt ved

$$(v)_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Siden matrisen $[T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}$ tar koordinatvektor til koordinatvektor, får vi

$$(T(v))_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(v)_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi & 5 \\ 9 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5\pi & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\pi - 40 \\ 59 \\ -5 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$T(v) = (3\pi - 40)w_1 + 59w_2 - 5w_3 - 24w_4.$$

(b) Dimensjonsteoremet for lineærtransformasjoner sier

$$\dim V = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{R}(T),$$

hvor $\ker(T)$ er kjernen til T, og $\mathrm{R}(T)$ er bildet. Siden V er 3-dimensjonalt får vi da

$$\dim \mathrm{R}(T) = \dim V - \dim \ker(T) = 3 - \dim \ker(T) \leq 3.$$

Derfor kan T *ikke* være surjektiv, for W er 4-dimensjonalt. Å være surjektiv betyr jo at $\mathrm{R}(T) = W$.

Oppgave 6. La P betegne den gitte overgangsmatrisen. Alle elemntene i P er positive, så spesielt er matrisen regulær. Vi har da et hendig resultat som sier at den stabile tilstandsvektoren er den unike sannsynlighetsvektoren $q = \left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ som tilfredsstiller $Pq = q$. Med andre ord, vi er ute etter vektoren $q = \left(\begin{smallmatrix} q_1 \\ q_2 \end{smallmatrix}\right)$ som tilfredsstiller

(1) $(P - I)q = 0$
(2) $q_1 + q_2 = 1$.

Finner derfor nullrommet til matrisen $P - I$:

$$\begin{aligned} P - I &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 \\ 2/3 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Så nullrommet er gitt ved

$$\{t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vi er ute etter den vektoren $\binom{3t}{4t}$ som tilfredsstiller $3t+4t=1$, dvs $t=1/7$. Derfor:

$$q = 1/7\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 7. Vi skal projisere $f(x)=e^x$ ned på det gitte rommet W. Projeksjonen er gitt ved

$$\operatorname{proj}_W f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x,$$

hvor Fourierkoeffisientene er gitt ved

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n=1,2,3) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n=1,2,3) \end{aligned}$$

Ved å kombinere de to integrallikhetene gitt i oppgaveteksten får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x\cos nx dx &= \frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\cos nx + n\sin nx) \qquad (n=1,2,3) \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x\sin nx dx &= \frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\sin nx - n\cos nx) \qquad (n=1,2,3) \end{aligned}$$

hvor vi har droppet de ubestemte konstantene. Da får vi

$$\begin{aligned} a_0 &= \left[\frac{1}{\pi}e^x\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \\ a_n &= \left[\frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\cos nx + n\sin nx)\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(n^2+1)} \qquad (n=1,2,3) \\ b_n &= \left[\frac{e^x}{\pi(n^2+1)}(\sin nx - n\cos nx)\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{n(e^{2\pi}-1)}{\pi(n^2+1)} \qquad (n=1,2,3) \end{aligned}$$

Projeksjonen er derfor gitt ved

$$\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{5}\sin 2x - \frac{3}{10}\sin 3x\right).$$