Anta at X er Poissonfordelt med parameter μ. Då veit me at punktsannsynet til X er

$$f(x;\mu) = p(x;\mu) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Frå definisjonen av forventningsverdi har me

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} && \text{det første leddet er 0} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\mu \cdot \mu^{x-1}}{x(x-1)!}e^{-\mu} \\
&= \mu\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\mu} && \text{trekk konstanten ut} \\
&= \mu\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!}e^{-\mu} && \text{substitusjon } y = x-1 \quad = \mu
\end{aligned} \tag{2}$$

der me kjenner at den siste summen som summen av Poisson punktsannsyn som me veit at skal summerast til 1. For å finne variansen nyttar me rekneregelen

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{3}$$

samt at $X^2 = X(X-1) + X$. Me får då

$$Var(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \tag{4}$$

der

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} && \text{definisjon funksjon av forventningsverdi} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} && \text{dei to første ledda er 0} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\mu^2\mu^{x-2}}{x(x-1)(x-2)!}e^{-\mu} \\
&= \mu^2\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!}e^{-\mu} && \text{trekk konstanten ut} \\
&= \mu^2\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\mu^y}{y!}e^{-\mu} && \text{substitusjon } y = x-2 \\
&= \mu^2
\end{aligned} \tag{5}$$

Me får altså

$$Var(X) = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu. \tag{6}$$