Hypotesetesting

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
25.03.2019

I dag

- Repetisjon
- Eksempel
- Val av tal på observasjonar n

Repetisjon

Hypotesetesting

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H_0	Ok	Type II-feil

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

$$\beta = P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ er riktig})$$

Korleis velge H_0 og H_1?

Ingen symmetri mellom konklusjonane, derfor ingen symmetri mellom H_0 og H_1.
Velg som H_1 det du ynskjer å sjekke/teste.
Velg som H_0 det "motsette" (typisk dagens situasjon).

p-verdi

Definisjon

Ein p-verdi er det lågaste signifikansnivået α slik at observert verdi for observatoren gjev at me skal forkaste H_0. Det vil seie, forkast H_0 dersom p-verdien er *lågare* enn α.

Eksempel

Eksempel

Situasjon

Ein produsent av fiskesnøre har utvikla eit nytt snøre produsenten. Eksisterande produsenter produserer snøre som toler 10 kg. Den nye produsenten hevdar at det nye snøret toler ei vekt ulik 10 kg. Produsenten har testa 10 fiskesnører $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ som er normalfordelt med forventning μ kg og ukjend standardavvik σ kg.

Eksempel

Situasjon

Ein produsent av fiskesnøre har utvikla eit nytt snøre produsenten. Eksisterande produsenter produserer snøre som toler 10 kg. Den nye produsenten hevdar at det nye snøret toler ei vekt ulik 10 kg. Produsenten har testa 10 fiskesnører $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ som er normalfordelt med forventning μ kg og ukjend standardavvik σ kg.

Test

$$H_0 : \mu = 10 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : \mu \neq 10.$$

Eksempel

Situasjon

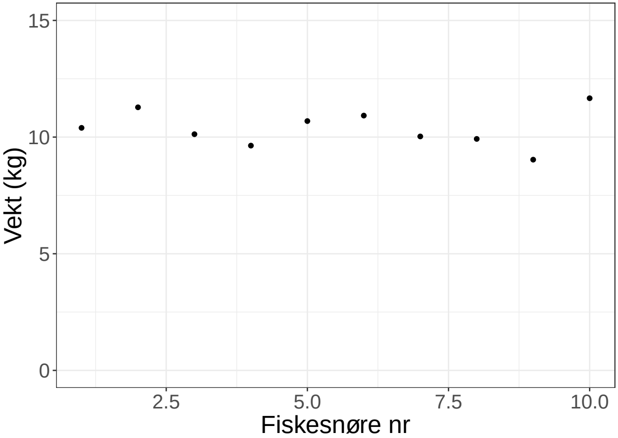
Ein produsent av fiskesnøre har utvikla eit nytt snøre produsenten. Eksisterande produsenter produserer snøre som toler 10 kg. Den nye produsenten hevdar at det nye snøret toler ei vekt ulik 10 kg. Produsenten har testa 10 fiskesnører $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ som er normalfordelt med forventning μ kg og ukjend standardavvik σ kg.

Test

$$H_0 : \mu = 10 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : \mu \neq 10.$$

Utfør testen ved signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Observasjonar



Bruk at $\bar{X} = 10.37$ kg og $\sqrt{S^2} = 0.79$ kg.

Alternative framgangsmåter

Under H_0 har me følgande testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}} \sim t_9$$

Me har

$$T_{\text{obs}} = 1.48$$

Alternative framgangsmåter

Under H_0 har me følgande testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}} \sim t_9$$

Me har

$$T_{\text{obs}} = 1.48$$

1. Forkast dersom $|T_{\text{obs}}| \geq t_{0.025,9}$ Konklusjon $1.48 \not\geq 2.26$

Alternative framgangsmåter

Under H_0 har me følgande testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}} \sim t_9$$

Me har

$$T_{\text{obs}} = 1.48$$

1. Forkast dersom $|T_{\text{obs}}| \geq t_{0.025,9}$ Konklusjon $1.48 \not\geq 2.26$
2. Forkast dersom $\bar{X} \geq 10 + t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$ eller $\bar{X} \leq 10 - t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$
   Konklusjon $\bar{X} \not\geq 10.56$ og $\bar{X} \not\leq 9.44$

Alternative framgangsmåter

Under H_0 har me følgande testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}} \sim t_9$$

Me har

$$T_{\text{obs}} = 1.48$$

1. Forkast dersom $|T_{\text{obs}}| \geq t_{0.025,9}$ Konklusjon $1.48 \not\geq 2.26$
2. Forkast dersom $\bar{X} \geq 10 + t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$ eller $\bar{X} \leq 10 - t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$
   Konklusjon $\bar{X} \not\geq 10.56$ og $\bar{X} \not\leq 9.44$
3. Forkast dersom p-verdi $\leq \alpha$:
   $P(T > T_{\text{obs}} \text{ eller } T < -T_{\text{obs}}) = 2 \cdot P(T > T_{\text{obs}}) = 0.17$
   Konklusjon $0.17 \geq 0.05$

Alternative framgangsmåter

Under H_0 har me følgande testobservator

$$T = \frac{\bar{X} - 10}{\sqrt{\frac{S^2}{10}}} \sim t_9$$

Me har

$$T_{\text{obs}} = 1.48$$

1. Forkast dersom $|T_{\text{obs}}| \geq t_{0.025,9}$ Konklusjon $1.48 \not> 2.26$
2. Forkast dersom $\bar{X} \geq 10 + t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$ eller $\bar{X} \leq 10 - t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S^2}{10}}$
   Konklusjon $\bar{X} \not> 10.56$ og $\bar{X} \not\leq 9.44$
3. Forkast dersom p-verdi $\leq \alpha$:
   $P(T > T_{\text{obs}} \text{ eller } T < -T_{\text{obs}}) = 2 \cdot P(T > T_{\text{obs}}) = 0.17$
   Konklusjon $0.17 \geq 0.05$
4. Forkast dersom $\mu \notin \left[\bar{X} - t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S_X^2}{10}}, \bar{X} + t_{0.025,9}\sqrt{\frac{S_X^2}{10}}\right]$
   Konklusjon $\mu = 10 \in [9.81, 10.93]$

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. Finn ein estimator for θ; $\widehat{\theta}$

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. Finn ein estimator for θ; $\widehat{\theta}$
3. Konstruer ein testobservator $Z = h(\widehat{\theta}, \theta_0)$, der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling under H_0 (og utan ukjend parametre)

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. Finn ein estimator for θ; $\widehat{\theta}$
3. Konstruer ein testobservator $Z = h(\widehat{\theta}, \theta_0)$, der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling under H_0 (og utan ukjend parametre)
4. Bestem eit forkastningskriterium (antar Z stor når $\widehat{\theta}$ stor)
   a) Forkast H_0 dersom $Z > k$
   b) Forkast H_0 dersom $Z < k$
   c) Forkast H_0 dersom $Z < k_l$ eller $Z > k_u$

   der k bestemmes frå kravet

$$P(\text{Forkast H}_0 \text{ når H}_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

Generell framgangsmåte

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim f(x_i; \theta)$.

1. Ynskjer å teste:
   a) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta > \theta_0$
   b) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta < \theta_0$
   c) $H_0 : \theta = \theta_0$ mot $H_1 : \theta \neq \theta_0$
2. Finn ein estimator for θ; $\widehat{\theta}$
3. Konstruer ein testobservator $Z = h(\widehat{\theta}, \theta_0)$, der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling under H_0 (og utan ukjend parametre)
4. Bestem eit forkastningskriterium (antar Z stor når $\widehat{\theta}$ stor)
   a) Forkast H_0 dersom $Z > k$
   b) Forkast H_0 dersom $Z < k$
   c) Forkast H_0 dersom $Z < k_l$ eller $Z > k_u$

   der k bestemmes frå kravet

$$P(\text{Forkast H}_0 \text{ når H}_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

5. Sett inn tal og konkluder

Val av tal på observasjonar n

Val av tal på observasjonar *n* I

Vil undersøkje om ein ny medisin *B* er betre enn eksisterande medisin *A*

- Eksisterande medisin *A* verker på 70% av pasientane
- Ny medisin *B* påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Korleis kan me konkludere om *B* er betre enn *A*?
Kor mange pasienter må me gi medisin *B* for å kunne vere "sikre" på konklusjonen vår?

Val av tal på observasjonar n II

Hypotesetest:

$$H_0 : p = p_0 = 0.7 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : p > 0.7$$

Hugs:

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx n(z; 0, 1) \quad \text{alltid}$$

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \approx n(z; 0, 1) \quad \text{når } H_0 \text{ er riktig}$$

Val av tal på observasjonar n III

Forkast H_0 dersom

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} > z_\alpha$$

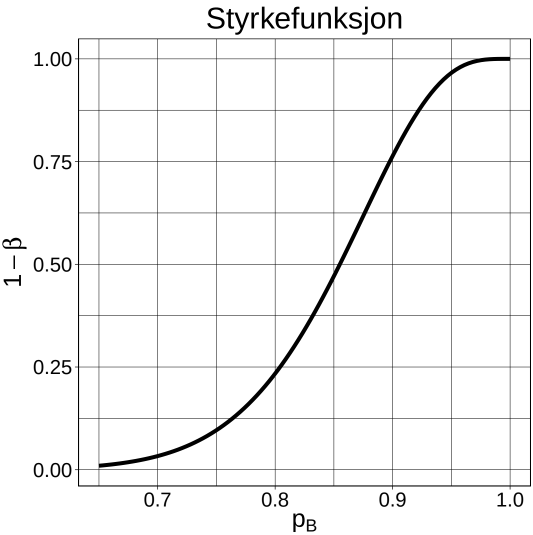
Velg α slik at

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ riktig}) \leq \alpha$$

er liten. Itillegg ynskjer me å velge n slik at me kontrollerer

$$P(\text{Type II-feil}) = P(\text{ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ riktig}) \leq \beta.$$

Val av tal på observasjonar *n* IV



Torsdag

— Lineær regresjon