NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Ordningsvariable

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
21.02.2019

I dag

— Eigenskapar til momentgenererande funksjonar

— Ordningsvariable

Repetisjon I

Situasjon:

- $X_1, \ldots, X_n$ uavhengige SV
- X_i-ane har kjend fordeling
- Definer $Y = u(X_1, \ldots, X_n)$
- Kva er fordelinga til Y?

Me skal sjå på følgjande:

- Ein X ($n = 1$) og $u(X)$ ein-eintydig
- Fleire X_i-ar ($n \geq 1$) og $u(X_1, \ldots, X_n)$ ein lineær funksjon
- Fleire X_i-ar ($n > 1$) der $u(X_1, \ldots, X_n)$ gir den k-te minste verdien

Repetisjon II

Diskret tilfelle

La X vere eit diskret stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y, dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y)).$$

Repetisjon III

Kontinuerleg tilfelle

La X vere eit kontinuerleg stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y, dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y))|w'(y)|.$$

Repetisjon IV

Moment (def)

Det r-te ordens moment til ein stokastisk variabel X er

$$\mu_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\mathrm{d}x & \text{kontinuerleg} \end{cases}.$$

Momentgenererande funksjon (def)

Den momentgenererande funksjonen til ein stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x & \text{kontinuerleg} \end{cases}.$$

Repetisjon V

Teorem 7.6

$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r = E(X^r)$$

Repetisjon VI

Unikhet (teorem 7.7)

La X og Y vere to stokastiske variable med momentgenererande funksjonar $M_X(t)$ og $M_Y(t)$. Dersom $M_X(t) = M_Y(t)$ for alle t er fordelingane til X og Y like.

Rekneregler I

Rekneregler

1. $M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$
2. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
3. La $X_1, \ldots, X_n$ vere uavhengige stokastiske variable med momentgenererande funksjonar $M_{X_1}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$ og la $Y = X_1 + \ldots X_n$. Då er

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

Lineærkombinasjon av normalfordelte SV

Teorem 7.11

La $X_1, \ldots, X_n$ vere uavhengige og normalfordelte stokastiske variable med $E(X_i) = \mu_i$ og $Var(X_i) = \sigma_i^2$. La

$$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n.$$

Då er Y normalfordelt med

$$\mu_Y = a_1 \mu_1 + \cdots + a_n \mu_n$$

og

$$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2.$$

Normalfordeling (Gaussfordeling)

$$f(x) = n(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

$$\mathrm{E}(X) = \mu\,, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,, \quad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

$$F(x) = P(X \le x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

Eksponentialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\,, \quad x \geq 0.$$

$$\mathrm{E}(X) = \beta\,, \quad \mathrm{Var}(X) = \beta^2\,, \quad M_X(t) = \frac{1}{1-\beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

Eksponentialfordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$\mathrm{E}(X) = \beta\,, \quad \mathrm{Var}(X) = \beta^2\,, \quad M_X(t) = \frac{1}{1-\beta t} \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Kommentar: Ofte vanlig å bruke parameteren $\lambda = 1/\beta$.

Gammafordeling

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0.$$

$$\mathrm{E}(X) = \alpha\beta\,, \quad \mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2\,, \quad M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha \text{ for } t < \frac{1}{\beta}.$$

Spesialtilfeller: $\alpha = 1$ gir eksponensialfordelingen.
$\alpha = \nu/2$ og $\beta = 2$ gir χ^2-fordelingen.

Sum av eksponentialfordelte SV

Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og eksponentialfordelte SV med forventning $E(X_i) = \mu$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. Då er

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

gammafordelt med $\alpha = n$ og $\beta = \mu$.

Ordningsvariable

Definisjon

La $X_1, \ldots, X_n$ vere uavhengige og identisk fordelte SV med fordeling $f_X(x)$ og kumulativ fordeling $F_X(x)$. Sorter $X_1, \ldots, X_n$ og la resultatet vere

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$$

Fordelinga til $V = X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ er:

$$f_V(v) = n\left[F_X(v)\right]^{n-1} f_X(v).$$

Fordelinga til $U = X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ er:

$$f_U(u) = n\left[1 - F_X(u)\right]^{n-1} f_X(u).$$

Teorem

Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavhengige SV, alle med kumulativ fordeling $F_X(x)$. Då er

$$F_{X_{(k)}}(x) = P(X_{(k)} \leq x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} [F_X(x)]^j \, [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

Neste veke

- Statistisk inferens