NTNU

Kunnskap for ei betre verd

To-utval og hypotesetesting

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

18.03.2019

I dag

— To-utval
— Hypotesetesting

Repetisjon

Prediksjonsintervall

Situasjon: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ der σ er kjend og μ ukjend. La $X_0 \sim n(x_0; \mu, \sigma)$ vere ei framtidig måling, uavhengig av $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- Ynskjer eit $(1-\alpha)100\%$ prediksjonsintervall for X_0
- Estimator for μ, $\hat{\mu} = \bar{X}$
- Start med

$$\bar{X} - X_0 \sim n\left(z; 0, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2}\right)$$

- Observator

$$Z = \frac{\bar{X} - X_0}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)}} \sim n(z; 0, 1)$$

- $(1-\alpha)100\%$ prediksjonsintervall for X_0

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + 1\right)}\right]$$

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tilfeldig utval frå $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1-\alpha$$

5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er

$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$

To-utval

To-utval

Situasjon (X og Y uavhengig):

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu_x, \sigma_x)$
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uif $n(y; \mu_y, \sigma_y)$

Mål: $(1-\alpha)100$ % konfidensintervall for differanse $\mu_x - \mu_y$.

To-utval

Situasjon (X og Y uavhengig):

- $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu_x, \sigma_x)$
- $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uif $n(y; \mu_y, \sigma_y)$

Mål: $(1-\alpha)100$ % konfidensintervall for differanse $\mu_x - \mu_y$.

To situasjonar

- σ_x og σ_y kjend:

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right]$$

To-utval

Situasjon (X og Y uavhengig):

— $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $n(x; \mu_x, \sigma_x)$

— $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uif $n(y; \mu_y, \sigma_y)$

Mål: $(1-\alpha)100$ % konfidensintervall for differanse $\mu_x - \mu_y$.

To situasjonar

— σ_x og σ_y kjend:

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}\right]$$

— σ_x og σ_y ukjend:

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha/2,v}\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}\right]$$

Les sjølve

- Kap 9.9 Parvise observasjonar (to normal-populasjonar)
- Kap 9.11 Estimering av differanse mellom to andeler ($p_1 - p_2$ i binomisk)

Introduksjon til hypotesetesting

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

— Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane

— Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

- Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane
- Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Korleis kan me konkludere om B er betre enn A?

Eksempel

Vil undersøkje om ein ny medisin B er betre enn eksisterande medisin A

- Eksisterande medisin A verker på 70% av pasientane
- Ny medisin B påstås å verke på meir enn 70% av pasientane

Korleis kan me konkludere om B er betre enn A?

Tester medisin B på $n = 25$ pasientar. Observerer betring for $x = 20$.

Hypotesetesting

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H_0	Ok	Type II-feil

Hypotesetesting

	H_0 riktig	H_1 riktig
Forkast H_0	Type I-feil	Ok
Ikkje forkast H_0	Ok	Type II-feil

Ide: vi må vere "sikre" før me påstår at H_1 er rett. Me velg signinifikansnivået α liten og krev

$$P(\text{Type I-feil}) = P(\text{Forkast } H_0 \text{ når } H_0 \text{ er riktig}) \leq \alpha$$

$$\beta = P(\text{Type II-feil}) = P(\text{Ikkje forkast } H_0 \text{ når } H_1 \text{ er riktig})$$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

- $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$
- $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$
- $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$
- $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$
- $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

- $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$
- $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$
- $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$
- $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$
- $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

- $P(X \geq 25) = 0.0001$
- $P(X \geq 24) = 0.0015$
- $P(X \geq 23) = 0.0089$
- $P(X \geq 22) = 0.0332$
- $P(X \geq 21) = 0.0904$

Fortsetjing eksempel

Finn k s.a. $P(X \geq k \text{ når } p_B = 0.7) \leq 0.05$.

- $P(X = 25) = \binom{25}{25} 0.7^{25} 0.3^{0} = 0.0001$
- $P(X = 24) = \binom{25}{24} 0.7^{24} 0.3^{1} = 0.0014$
- $P(X = 23) = \binom{25}{23} 0.7^{23} 0.3^{2} = 0.0073$
- $P(X = 22) = \binom{25}{22} 0.7^{22} 0.3^{3} = 0.0243$
- $P(X = 21) = \binom{25}{21} 0.7^{21} 0.3^{4} = 0.0572$

- $P(X \geq 25) = 0.0001$
- $P(X \geq 24) = 0.0015$
- $P(X \geq 23) = 0.0089$
- $P(X \geq 22) = 0.0332$
- $P(X \geq 21) = 0.0904$

Må velge $k = 22$

Sannsyn type-II feil

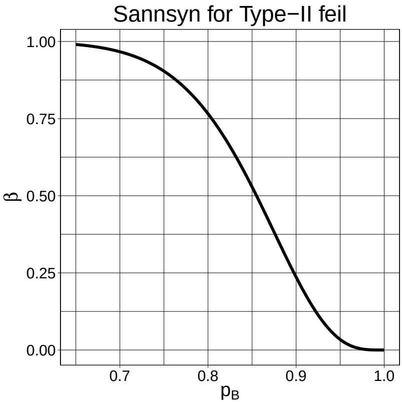

Figure: $\beta = P(X < 22 \text{ når } p_B > 0.7) = \sum_{x=0}^{21} \binom{25}{x} p_B^x (1 - p_B)^{25-x}$

Styrkefunksjon

Teststyrke/styrkefunksjon

Definisjon

Styrken til ein test er sannsynet for å forkaste H_0 gitt at ein spesifikk alternativ hypotese θ_1 er sann

— teststyrken er $1 - \beta(\theta_1)$
— teststyrken er ein funksjon av θ_1
— desto høgare styrke, desto høgare sannsyn for at me klarer å konkludere med at den alternative påstanden er sann når den spesifikke alternative hypotesen er sann.

Styrkefunksjon

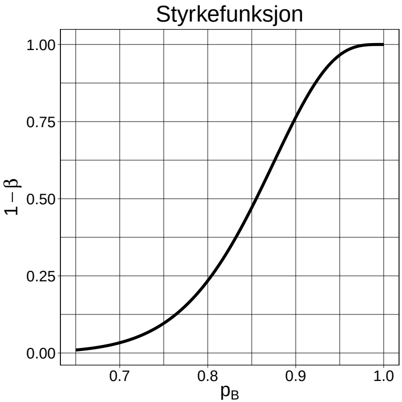

Figure: $1-\beta = 1 - P(X < 22 \text{ når } p_B > 0.7) = 1 - \sum_{x=0}^{21} \binom{25}{x} p_B^x (1-p_B)^{25-x}$

Torsdag

— Hypotesetesting (Øyvind Bakke vil vere vikar)