NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Funksjonar av stokastiske variable

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
18.02.2019

I dag

- Transformasjon av stokastiske variable
- Momentgenererande funksjon

Situasjon

- Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavhengige SV
- Anta X_i-ane har ei kjend fordeling
- Definer $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Finn fordelinga til Y

Situasjon

- Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavhengige SV
- Anta X_i-ane har ei kjend fordeling
- Definer $Y = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- Finn fordelinga til Y

Me skal fokusere på følgjande situasjonar

1. Kun ein X ($n = 1$) og $u(X)$ er ein-eintydig
2. Fleire X_i-ar ($n > 1$) og $u(\cdot)$ er ein lineærfunksjon
3. Fleire X_i-ar ($n > 1$) og $u(\cdot)$ gir den k-te minste verdien

Eksempel

Kast ein terning. La X vere talet på auge, då er $P(X = x) = f(x) = 1/6$ for $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

La $Y = u(X) = X^2$.

— Finn $P(Y = y) = g(y)$

Eksempel

Kast ein terning. La X vere talet på auge, då er
$P(X = x) = f(x) = 1/6$ for $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

La $Y = u(X) = X^2$.

— Finn $P(Y = y) = g(y)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Eksempel

Kast ein terning. La X vere talet på auge, då er $P(X = x) = f(x) = 1/6$ for $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

La $Y = u(X) = X^2$.

- Finn $P(Y = y) = g(y)$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

y	1	4	9	16	25	36
$g(y)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Transformasjonsformelen I

Diskret tilfelle

La X vere eit diskret stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y, dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y)).$$

Transformasjonsformelen II

Kontinuerleg tilfelle

La X vere eit kontinuerleg stokastisk variabel med fordeling $f(x)$. La $Y = u(X)$ definere ein ein-eintydig funksjon mellom X og Y, dvs

$$Y = u(X) \Leftrightarrow X = w(Y).$$

Då er fordelinga til Y gjeve ved

$$g(y) = f(w(y))|w'(y)|.$$

Eksamen H2019

Oppgåve 1

La X vere ein stokastisk variabel med sannsynstettleik

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & x \in (-1,1) \\ 0 & \text{elles} \end{cases}$$

Sjå på $Y = X^2$.

1. Finn den kumulative fordelinga til Y.
2. Finn sannsynstettleiken til Y.

Moment og momentgenererande funksjon I

Moment (def)

Det r-te ordens moment til ein stokastisk variabel X er

$$\mu_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_x x^r f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\mathrm{d}x & \text{kontinuerleg} \end{cases}.$$

Momentgenererande funksjon (def)

Den momentgenererande funksjonen til ein stokastisk variabel X er

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & \text{diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\mathrm{d}x & \text{kontinuerleg} \end{cases}.$$

Moment og momentgenererande funksjon II

Teorem 7.6

$$M_X^{(r)}(0) = \mu_r = E(X^r)$$

I morgon

- Eigenskapar til momentgenererande funksjonar
- Ordningsvariable