



Utvælsfordelinga til S^2

Torstein Fjeldstad

Institutt for matematiske fag, NTNU

11.03.2019

I dag



- Repetisjon
- Utvalgsfordelinga til S^2
- Introduksjon til (Student) t-fordelinga



Repetisjon

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval frå $f(x; \theta)$ -populasjonen. Ynskjer eit $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ .

1. Finn ein estimator for θ , $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot, \cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)) = 1 - \alpha$$

5. Et $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ er

$$[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \dots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

Konfidensintervall når både μ og σ er ukjent

Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$. Ynskjer konfidensintervall for μ , men σ er ukjent. Estimator for μ , $\hat{\mu} = \bar{X}$.

1. Når σ^2 er kjend har me

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1)$$

Konfidensintervall når både μ og σ er ukjent

Anta X_1, X_2, \dots, X_n tilfeldig utval med $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$. Ynskjer konfidensintervall for μ , men no er σ ukjent. Estimator for μ , $\hat{\mu} = \bar{X}$.

1. Når σ^2 er kjend har me

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1)$$

2. Erstatt σ^2 med følgjande estimator:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Kva er fordelinga til

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

Me starter med å finne fordelinga til S^2 .



Utvælsfordelinga til S^2

Utvælsfordelinga til S^2 (kap 8.5) I



Forventningsrett

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2$$

Utvalsfordelinga til S^2 (kap 8.5) II



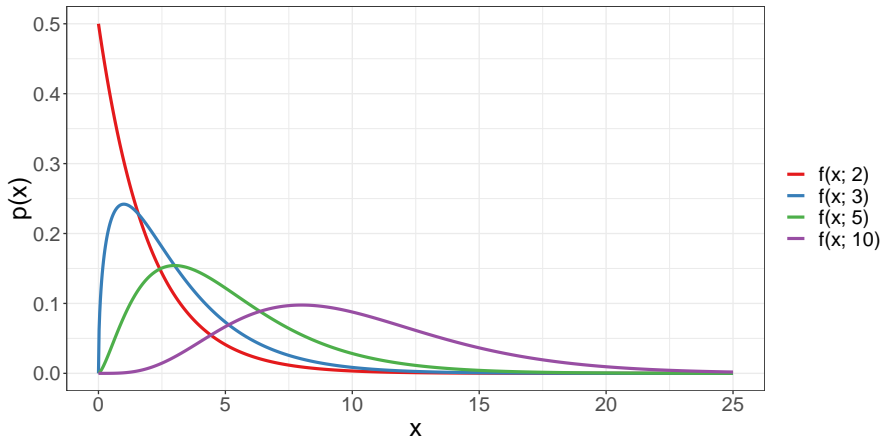
Kji-kvadratfordeling (χ^2 -fordeling)

Sannsynstettleiken til ein χ^2 -fordelt variabel X er:

$$f(x; \nu) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Det kan visast at

$$E(X) = \nu \quad \text{og} \quad \text{Var}(X) = 2\nu.$$



Utvælsfordelinga til S^2 (kap 8.5) I

Kvadrat av standard normalfordelt variabel

La $X \sim n(x; 0, 1)$ og la $Y = X^2$. Då er $Y \sim \chi_1^2$ (kji-kvadratfordelt med parameter $\nu = 1$). Me kallar ν talet på fridomsgrader.

Lineærkombinasjon av χ^2 -fordelte variablar

La X_1, X_2, \dots, X_n vere uavhengige og kji-kvadratfordelte stokastiske variablar med høvevis $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ fridomsgrader. Då er

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

kji-kvadratfordelt med $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$ fridomsgrader

Utdalstordelina til S^2 (kap 8.5) II



Utdalstordelina til S^2

Dersom X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige og $X_i \sim n(x_i; \mu, \sigma)$ er

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

og $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ og \bar{X} er uavhengige.

Egenskapar

$$1. Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim n(z; 0, 1)$$

$$2. Y_i = Z_i^2 = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$$3. \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

$$4. \bar{X} \sim n(x; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$5. Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim n(z; 0, 1)$$

$$6. Z^2 = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)^2 = n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

(Student) t-fordeling

Definisjon

La $Z \sim n(z; 0, 1)$ og $V \sim \chi^2_\nu$ der Z og V er uavhengige. Då vil fordelinga

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}$$

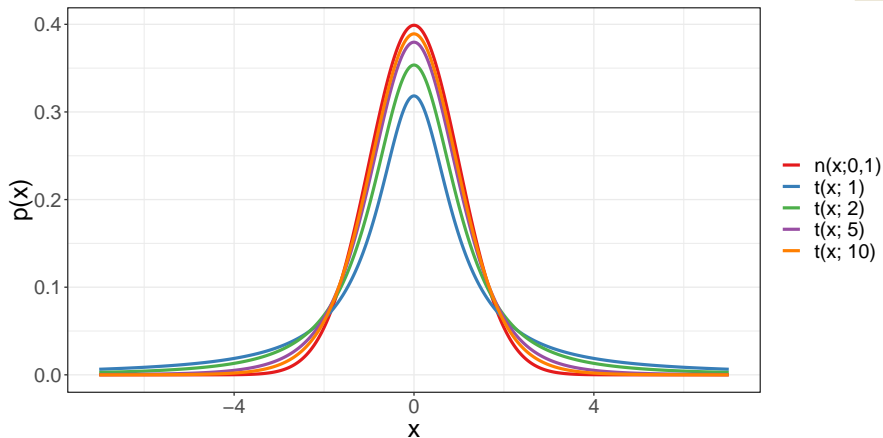
ha sannsynstettleik

$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad -\infty < t < \infty.$$

Det kan visast at

$$E(T) = 0 \quad \text{og} \quad \text{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Samanlikning normal- og t-fordeling





— Konfidensintervall basert på t-fordelinga