NTNU
Kunnskap for ei betre verd

Konfidensintervall

Torstein Fjeldstad
Institutt for matematiske fag, NTNU
07.03.2019

I dag

— Konfidensintervall

Konfidensintervall

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Estimator for μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Estimator for μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Veit at $\bar{X} \sim n(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, derfor er

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(z; 0, 1)$$

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Estimator for μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Veit at $\bar{X} \sim n(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, derfor er

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim n(z; 0, 1)$$

3. Har at

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x; \mu, \sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Estimator for μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Veit at $\bar{X} \sim n(\bar{x}; \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, derfor er
$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(z; 0, 1)$$
3. Har at
$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$
4. Løyser ulikskapane for μ og får
$$P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

Konfidensintervall for μ i normalfordelinga (σ kjend)

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $n(x;\mu,\sigma)$-populasjonen der σ er kjend. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Estimator for μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. Veit at $\bar{X} \sim n(\bar{x};\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, derfor er
$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim n(z;0,1)$$
3. Har at
$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$
4. Løyser ulikskapane for μ og får
$$P(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$
5. Eit $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for μ er
$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x; \theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \dots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \le h(\hat{\theta}, \theta) \le z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at

$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - \alpha$$

Utledning av konfidensintervall

Situasjon: Anta $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$-populasjonen. Ynskjer eit $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall for θ.

1. Finn ein estimator for θ, $\hat{\theta}$ (t.d. SME)
2. La $Z = h(\hat{\theta}, \theta)$ der $h(\cdot,\cdot)$ er ein funksjon s.a. Z har ei kjend fordeling.
3. Då har me at
$$P(z_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\theta}, \theta) \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$
4. Løys ulikskapane (mhp. θ) kvar for seg og finn eit uttrykk med θ i midten
$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1-\alpha$$
5. Et $(1-\alpha)\cdot 100$ % konfidensintervall for θ er
$$\left[\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \ldots, X_n), \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right]$$

Neste veke

- Meir om konfidensintervall