Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4140 Diskret matematikk**

Faglig kontakt under eksamen: Christian Skau

Tlf: 73591755

Eksamensdato: 18 desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Bestemt, enkel kalkulator, Rottmann: *Matematisk formelsamling*.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Eksamenssettet består av to deler: Oppgave 1 til 5 med i alt 10 punkter (hvert punkt teller like mye) utgjør en del, og oppgave 6, som er en flervalgsoppgave utgjør den andre delen. Oppgave 6 teller 50%, og oppgavene 1 til 5 teller 50%. Siste side av oppgavesettet er et ark med en kupong der dine svar skal krysses av. Denne siden med kupongen skal merkes med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de fem første oppgavene.

Oppgave 1

a) Finn den minste positive heltallsløsningen til kongruensligningene:

$$x \equiv 3 \pmod 4$$
$$x \equiv 5 \pmod 9$$
$$x \equiv 10 \pmod{35}$$

Synliggjør framgangsmåte.

b) Vis at

$$1^{30} + 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} + 5^{30} + 6^{30} \equiv -1 \pmod 7$$

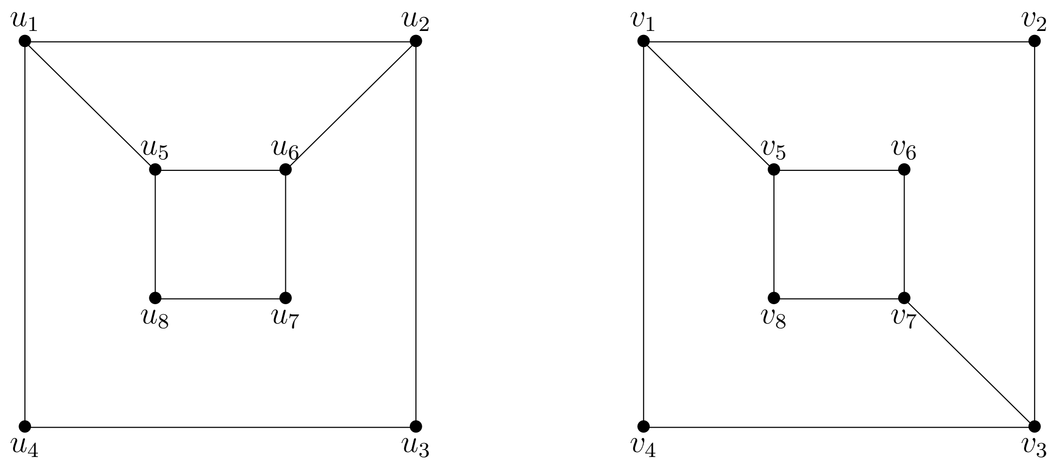
Oppgave 2 Bevis ved induksjon formelen

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 2 - n}{2^n}$$

for alle $n \geq 1$.

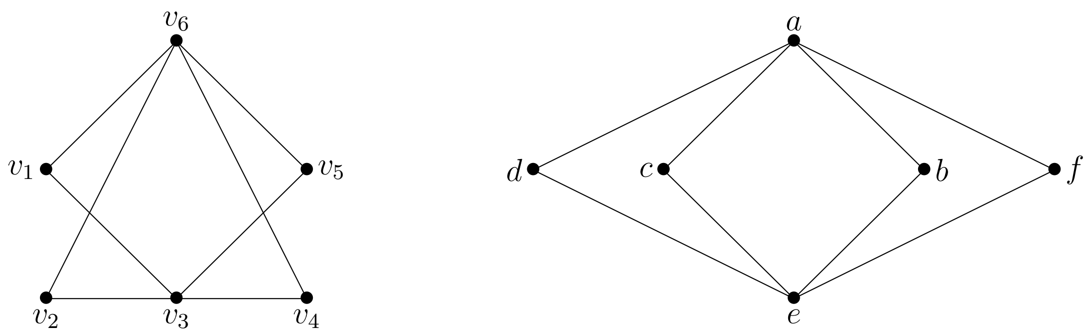
Oppgave 3

a) Gi en begrunnelse for om de to grafene i Figur 1 er isomorfe eller ikke. Dersom de er isomorfe, angi en isomorfi.



Figur 1: Grafene til Oppgave 3 a)

b) Gi en begrunnelse for om de to grafene i Figur 2 er isomorfe eller ikke. Dersom de er isomorfe, angi en isomorfi.



Figur 2: Grafene til Oppgave 3 b)

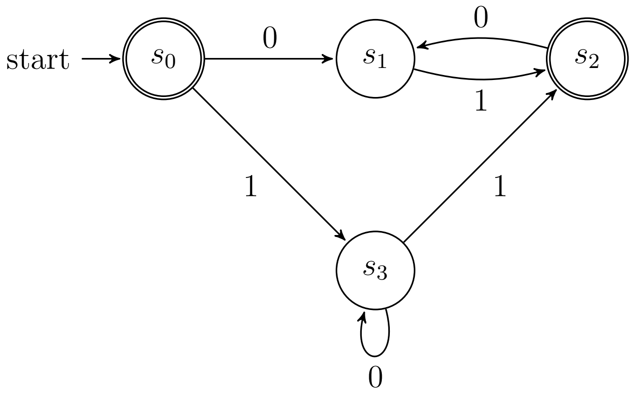
Oppgave 4

a) På hvor mange måter kan man fordele 6 eksemplarer av samme lærebok til de tre studentene Lise, Per og Anne, der en student kan motta flere eksemplarer? Forklar din framgangsmåte.

b) Man har 20 identiske kort som skal puttes i 12 distinkte konvolutter. På hvor mange måter kan dette gjøres dersom hver konvolutt skal inneholde minst ett kort? Forklar din framgangsmåte.

Oppgave 5

a) Finn et regulært uttrykk for språket $L(M)$ som den endelige ikke-deterministiske tilstandsautomaten $M = (S, I, f, s_0, F)$ i Figur 3 gjenkjenner.



Figur 3: Den endelige ikke-deterministiske tilstandsautomaten til Oppgave 5 a)

b) Finn en regulær grammatikk $G = (V, T, S, P)$ som genererer samme språk som $L(M)$ i a).

c) Konstruer en endelig (deterministisk eller ikke-deterministisk) tilstandsautomat $M = (S, I, f, s_0, F)$, der antall tilstander $|S|$ er ≤ 4, slik at $L(M)$ er lik språket representert ved det regulære uttrykket $1(1^*01^*0)^*$.

Oppgave 6

INSTRUKSJONER:

Dette er en flervalgsoppgave, der siste siden er et ark med en kupong hvor dine svar skal krysses av. Denne siden skal markeres med kandidatnummeret ditt og leveres sammen med besvarelsene på de første fem oppgavene. Det vil være minst ett, men gjerne flere rette svaralternativer for hver deloppgave. Det er totalt 10 rette svar og du skal ikke sette flere kryss enn dette. Rett kryss gir 1 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Setter du flere enn 10 kryss trekkes du 3 poeng pr kryss mer enn 10.

Deloppgave 1 Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) $(p \vee (\neg p \wedge \neg q)) \to ((\neg(r \vee q)) \vee p)$ er en tautologi.

Alt 2) $((p \to q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$ er en tautologi.

Alt 3) Prefiksuttrykket $+-*235/\uparrow 234$ har verdien 2.

Alt 4) Postfiksuttrykket $723*-4\uparrow 93/+$ har verdien 4.

Deloppgave 2 Gitt rekurrensrelasjonen

$$a_n = -3a_{n-1} + 18a_{n-2}; \qquad n \geq 2.$$

Hvilke av følgende er løsning av denne rekurrensrelasjonen?

Alt 1) $3^{2n} + (-6)^n$

Alt 2) $a_n = 5(-6)^n$

Alt 3) $a_n = 3^n + 6^n$

Alt 4) $a_n = 3^{n-2} + 2(-6)^{n+1}$

Deloppgave 3 Hvor mange ikke-isomorfe trær finnes det som har 4 noder?

Alt 1) 3

Alt 2) 4

Alt 3) 2

Alt 4) 6

Deloppgave 4 La $L(G)$ være språket generert av grammatikken $G = (V, T, S, P)$, der $V = \{A, B, S, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$, og P er gitt ved:

$$S \to AS, \quad S \to ABS, \quad S \to A, \quad AB \to BA, \quad BA \to AB, \quad A \to 0, \quad B \to 1.$$

Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) $L(G)$ består av alle binære strenger som har flere 0'er enn 1'ere.

Alt 2) $L(G)$ består av alle binære strenger som har like mange eller flere 0'er enn 1'ere.

Alt 3) $L(G)$ består av alle binære strenger som har like mange 0'er som 1'ere.

Alt 4) $L(G)$ består av alle binære strenger som har flere 1'ere enn 0'er.

Deloppgave 5 Hvilke av følgende er sant?

Alt 1) 30! slutter med nøyaktig syv 0'er i desimal (10-talls) systemet.

Alt 2) 14! er delelig med 3^6.

Alt 3) $(2\text{AC})_{16}$ er $(784)_{10}$ i desimal systemet.

Alt 4) $(11010111100)_2$ er $(3174)_8$ i åttetallssystemet.

Deloppgave 6 La A være en mengde av kardinalitet $n \geq 2$, dvs. $|A| = n \geq 2$. Hvor mange forskjellige symmetriske relasjoner på A finnes det?

Alt 1) 2^{n^2}

Alt 2) 2^{2^n}

Alt 3) $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Alt 4) $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Deloppgave 7 La universalmengden være de hele tall $\mathbb{Z}$. Hvilke av følgende er garantert sant?

Alt 1) $\forall m(7|(m^8 - m^2))$, der $a|b$ betegner at a er en divisor til b.

Alt 2) $\exists m \exists n \left(|m - n| < \Big||m| - |n|\Big|\right)$.

Alt 3) $\forall m \exists n \exists k \left(k = \frac{m^2+n^2}{4}\right)$

Alt 4) $\exists s \exists t\,(11111s + 111111t = 3)$

Deloppgave 8 Hvilke av følgende utsagn er sanne?

Alt 1) Den komplette todelte grafen $K_{4,7}$ har en Eulervei.

Alt 2) Det er tre ikke-isomorfe enkle urettede grafer med 3 noder.

Alt 3) Det er $n^2 - 2n$ nuller i nabomatrisen til sykelgrafen C_n på $n \geq 3$ noder.

Alt 4) Den komplette todelte grafen $K_{6,7}$ har en Hamiltonkrets.

SVARKUPONG

Kryss av det du mener er riktige svar, inntil 10 kryss. Et riktig satt kryss gir 1 poeng, og hvert kryss mer enn 10 gir –3 poeng. (Du trekkes ikke for å sette et kryss galt.) Merk denne siden med kandidatnummer, og lever den.

Kandidatnummer:

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				
Deloppgave 2				
Deloppgave 3				
Deloppgave 4				
Deloppgave 5				
Deloppgave 6				
Deloppgave 7				
Deloppgave 8				

Eksamen i TMA4140 Diskret matematikk
18 desember 2015
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) 4, 9 og 35 er parvis primiske, så vi kan bruke det kinesiske restteoremet.

$$m = 4 \cdot 9 \cdot 35 = 1260.$$

$$M_1 = \frac{m}{4} = 315, \quad M_2 = \frac{m}{9} = 140, \quad m_3 = \frac{m}{35} = 36.$$

$$\begin{aligned} M_1 y_1 &\equiv 1 \pmod{4}, & y_1 &= -1 \\ M_2 y_2 &\equiv 1 \pmod{9}, & y_2 &= 2 \\ M_3 y_3 &\equiv 1 \pmod{35}, & y_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$x = 3 \cdot M_1 \cdot y_1 + 5 \cdot M_2 \cdot y_2 + 10 \cdot M_3 \cdot y_3 = 815$$

Siden $0 \leq 815 < 1260 = m$, så er $\underline{815}$ svaret.

b) Dersom $(a, 7) = 1$, så sier Fermats teorem at $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Følgelig er $a^{30} = (a^6)^5 \equiv 1^5 = 1 \pmod{7}$. Altså

$$\begin{aligned} 1^{30} + 2^{30} + 3^{30} + 4^{30} + 5^{30} + 6^{30} &\equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &\equiv -1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Oppgave 2 La $P(n)$ være påstanden

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 2 - n}{2^n}; \quad n \geq 1.$$

Vi ser at $P(1)$ er sann ($\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$). Anta at $P(k)$ er sann, dvs.

$$P(k): \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{k}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 2 - k}{2^k}.$$

$$P(k+1): \quad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+2}-2-(k+1)}{2^{k+1}}$$

Sjekker venstresiden i $P(k+1)$, og bruker induksjonsantagelsen at $P(k)$ er sann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}} &= \frac{2^{k+1}-2-k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}\\ &= \frac{2(2^{k+1}-2-k)+(k+1)}{2^{k+1}}\\ &= \frac{2^{k+2}-2-(k+1)}{2^{k+1}},\end{aligned}$$

som er høyresiden i $P(k+1)$.

Oppgave 3

a) Grafene er ikke isomorfe siden venstre graf har 3 delgrafer som er C_4, mens høyre graf har 2 delgrafer som er C_4.

b) Grafene er isomorfe. En isomorfi F er gitt ved:

$$F(a)=v_6, \quad F(b)=v_4, \quad F(c)=v_2, \quad F(d)=v_1, \quad F(e)=v_3, \quad F(f)=v_5$$

En annen isomorfi er gitt ved:

$$F(a)=v_6, \quad F(b)=v_5, \quad F(c)=v_1, \quad F(d)=v_2, \quad F(e)=v_3, \quad F(f)=v_4$$

Oppgave 4

a)
```
**    | *** | *
Lise   Per   Anne
```

De to stolpene angir plasseringen av Lise, Per og Anne, henholdsvis. Stjernene `*` angir hvordan lærebøkene fordeles mellom de tre. (I figuren som vises får Lise to, Per tre og Anne en lærebok.) Antall måter å fordele lærebøkene på er lik antall måter man plukker ut 2 (eller 6) posisjoner av ialt $8=(6+3-1)$ posisjoner. Altså er svaret

$$\binom{8}{2}=28=\binom{8}{6}.$$

b)

```
    |  * |    |  * | ** |  * |    |    | ** |    |    | *
 1     2    3     4    5    6    7    8    9   10   11   12
```

De elleve stolpene angir plasseringen av de 12 konvoluttene, mens stjernene * angir i hvilke konvolutter de $8(= 20 - 12)$ ekstra kortene skal puttes. (Figuren illustrerer at det er ett kort i konvolutt 1, to i 2, ett i 3, to i 4, tre i fem, to i 6, ett i 7, ett i 8, tre i 9, ett i 10, ett i 11 og to i konvolutt 12.) Antall måter å gjøre dette på er lik antall måter å plukke ut 11 (eller 8) posisjoner av ialt $19(= 12 + 8 - 1)$ posisjoner. Svaret er altså

$$\binom{19}{11} = 75582 = \binom{19}{8}.$$

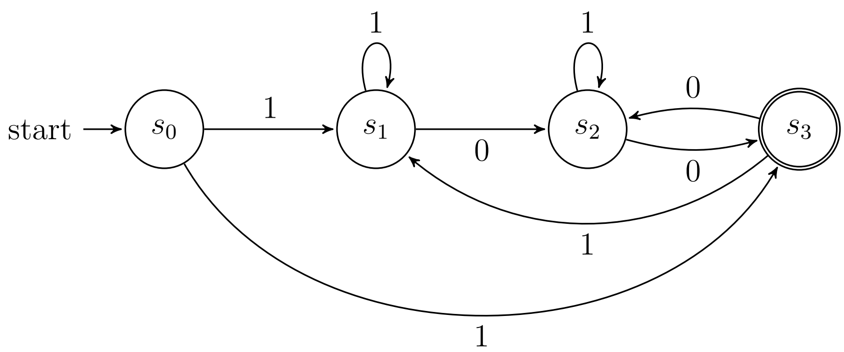
Oppgave 5

a) $(\lambda \cup 10^*1)(01)^*$

b) La $S \leftrightarrow s_0$, $A \leftrightarrow s_1$, $B \leftrightarrow s_2$, $C \leftrightarrow s_3$. La $V = \{S, A, B, C, 0, 1\}$, $T = \{0, 1\}$. P er da gitt ved:

$$\begin{array}{llll} S \to \lambda & A \to 1B & B \to 0A & C \to 0C \\ S \to 0A & A \to 1 & & C \to 1B \\ S \to 1C & & & C \to 1 \end{array}$$

c)



Oppgave 6

	Alt 1	Alt 2	Alt 3	Alt 4
Deloppgave 1				X
Deloppgave 2		X		X
Deloppgave 3			X	
Deloppgave 4	X			
Deloppgave 5	X			
Deloppgave 6				X
Deloppgave 7	X			X
Deloppgave 8			X	