Laplace transform

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Egenskaper:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f] - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)](s) = e^{-as}F(s)$$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g],$$

hvor $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds$

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = e^{-as}$$

$$\mathcal{L}[u(t-a)](s) = \frac{e^{-as}}{s}$$

Anvendelse:

$y'' + ay' + by = f\,, \quad y'(0) = c\,,\ y(0) = d$

$\underset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} \quad (s^2 + as + b)Y = F + \dots$

$\underset{\textbf{solve}}{\rightsquigarrow} \quad Y = \dots \quad \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} \quad y = \mathcal{L}^{-1}[Y]$

Fourier transform

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-iwx} f(x)\,dx$$

$$\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{iwx} g(w)\,dw$$

Egenskaper:

$$\mathcal{F}[af(x) + bg(x)] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

$$\mathcal{F}[f'](w) = iw\mathcal{F}[f](w)$$

$$\mathcal{F}[f''](w) = -w^2\mathcal{F}[f](w)$$

$$\mathcal{F}[e^{iax} f(x)](w) = \hat{f}(w-a)$$

$$\mathcal{F}[f(x-a)](w) = e^{iaw}\hat{f}(w)$$

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g],$$

hvor $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)\,dy$

$$\mathcal{F}[\delta(t-a)](s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iwa}$$

Fourierintegral: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(w) e^{iwx}\,dw = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]$

Anvendelse:

$u_t = c^2 u_{xx}\,,\ t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \quad u|_{t=0} = f$

$\rightsquigarrow \quad \hat{u}_t = -c^2 w^2 \hat{u}\,, \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{f}$

$\underset{\textbf{solve}}{\rightsquigarrow} \quad \hat{u} = \dots \quad \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\rightsquigarrow} \quad u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$

Fourierrekker

2L periodisk: $f(x) \sim S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\right)$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx} \quad \boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,dx} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,dx}$$

Konvergens: $S_f(x) = \begin{cases} f(x), & f \text{ kont. i } x \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & f \text{ diskont. i } x \end{cases}$ [f stykkevis kont., h. og v. deriv. eks.]

Parseval: $\boxed{2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx}$

Utvidelser av $f(x)$, $x \in [0, L]$, til $\mathbb{R}$:

Odde 2L periodisk utv.: $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$	Like 2L periodisk utv.: $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$
$h(x) = f(x)$, $x \in [0, L]$ (utv)	$g(x) = f(x)$, $x \in [0, L]$ (utv)
$h(x) = -h(-x)$, $x \in [-L, 0]$ (odde)	$g(x) = g(-x)$, $x \in [-L, 0]$ (like)
$h(x + 2L) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($2L$-per)	$g(x + 2L) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($2L$-per)

Fourier sinus rekken til $f(x)$, $x \in [0, L]$: (= Fourierrekken til $h(x)$)

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \quad \boxed{a_n = 0} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} h(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,dx}$$

Fourier cosinus rekken til $f(x)$, $x \in [0, L]$: (= Fourierrekken til $g(x)$)

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \quad \boxed{b_n = 0} \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx} \quad \boxed{a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,dx}$$

Partielle differensiallikninger

Bølgelikning	$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (t,x) \in D$	(hyperbolsk)
Varmelikning	$u_t = c^2 u_{xx}, \quad (t,x) \in D$	(parabolsk)
Laplace likning	$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x,y) \in D$	(elliptisk)

Løsning: Tilstrekkelig deriverbar funksjon u som opfyller PDL i alle punkt i D.

- Ikke entydig uten tilleggsbetingelser:

  - Cauchy bet. = initialbet.: Eks. $u(x, t=0) = f(x)$
  - Dirichlet randbetingelse: Eks. $u(x=0,t) = 0, \quad u(x=1,t) = 3$
  - Neumann randbetingelse: Eks. $u_x(x=0,t) = 0 = u_x(x=1,t)$

Eksempel: Cauchy-Neumann problem

$$\begin{aligned} & u_t = c^2 u_{xx} && x \in (0,\pi), \ t > 0 \\ & u(x,0) = f(x) && x \in (0,\pi) \\ & u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t) && t > 0 \end{aligned}$$

Løsning:

$u(x,t) = e^{-c^2 t}\cos(x)$,

når $f(x) = \cos(x)$

Superposisjon: Hvis u, v løser lineær homogen PDL, så løser $au + bv$ samme PDL

Løsningsmetoder:

1. Fouriertransform $(x \in \mathbb{R})$, Laplacetransform $(x \in [0,\infty))$
2. Separasjon av variable + Fourierrekker $(x \in [0,L])$
3. D'Alemebert: Løsn. av bølgelikn. er på formen $\phi(x+ct) + \psi(x-ct)$ [best. ϕ, ψ]

Seperasjon av variable:

1. PDL + homogene tilleggsbetingelser:

   Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x) \cdot G(t)$;

   $\rightsquigarrow u_n = F_n \cdot G_n\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

2. Inhomogene tillegsbetingelser

   Superposisjon: $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n, \quad$ der u_n er fra 1.

   Velg c_n slik at u tilfredstiller inhomogen tillegsbet. (bruk Fourierrk.)

Inhomogene problem:

$$\begin{cases} Au = f & \text{i } \Omega, \\ u = g & \text{i } \partial\Omega \end{cases} \qquad A = a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Løsning $u = u_1 + u_2$ hvor

$$\begin{cases} Au_1 = f & \text{i } \Omega, \\ u_1 = 0 & \text{i } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{and} \quad \begin{cases} Au_2 = 0 & \text{i } \Omega, \\ u_2 = g & \text{i } \partial\Omega. \end{cases}$$

Analytiske funksjoner

$f(z)$ **analytisk i** z_0 : $f(z)$ deriverbar i z_0 (+ liten omegn)

$f(z)$ analytisk i domene $D \implies \infty$ deriverbar med konvergent Taylorrekke i D

$$\boxed{f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ analytisk i } D}$$

$$\Updownarrow$$

Cauchy-Riemann likningene:

$$\boxed{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad \text{i} \quad D} \quad [u_x, u_y, v_x, v_y \text{ kontinuerlig}]$$

$$\Downarrow$$

u og v konjugerte harmoniske funksjoner:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0} \quad \text{og} \quad \boxed{v_{xx} + v_{yy} = 0} \quad \text{i} \quad D$$

Cauchys integralteorem	Cauchys integralformel
$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 0}$	$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
hvis C enkel, lukka, og f analytisk på og innenfor C	hvis C enkel, lukka, mot kl., omslutter z_0, f analytisk på og innenfor C

Laurentrekker, singulariteter, residyteoremet

Hvis $f(z)$ analytisk på $|z-z_0|<R$ / $r<|z-z_0|<R$ da er (Taylor/Laurents teorem)

Taylorrekke: $\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \left[a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right] \quad$ for $\boxed{|z-z_0|<R}$

Laurentrekke: $\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k} \quad$ for $\boxed{r<|z-z_0|<R}$

Singulariteter: Punkt der $f(z)$ ikke analytisk/definert ...

Isolert singularitet z_1 = eneste singularitet i liten disk:

1. Orden n pol z_0: $\quad f(z)=\sum a_k(z-z_0)^k+\frac{b_1}{z-z_0}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}, \quad 0<|z-z_0|<R$
2. Essensiell sing. z_0: $\quad f(z)=\sum a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(z-z_0)^k}, \quad 0<|z-z_0|<R$
3. Hevbar sing. z_0: ...

Residy: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=b_1$ når

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots, \quad 0<|z-z_0|<R$$

z_0 orden n pol: $\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}}$

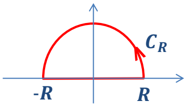
Residyteoremet: $\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$	hvis (i) C enkel, lukket, orientert mot kl., og (ii) f analytisk på og innenfor C utenom $z_1,\ldots,z_m$

Residy integrasjon av reelle integraler

1. $\boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta} \underset{z=e^{i\theta}}{=} \oint_{|z|=1} F\left(\tfrac{1}{2}\left(z+\tfrac{1}{z}\right), \tfrac{1}{2i}\left(z-\tfrac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{iz}$

---

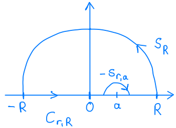
2. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx} = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\, dx}$



$$= \underbrace{\oint_{C_R} f(z)\, dz}_{\text{residyteoremet}} - \underbrace{\int_{S_R} f(z)\, dz}_{\longrightarrow\, 0 \text{ ved ML-ulikheten}}$$

---

3. $\boxed{\text{pr.v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx} = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \underbrace{\left(\int_{-R}^{a-r} + \int_{a+r}^{R}\right) f(x)\, dx}$



$$= \underbrace{\oint_{C_{r,R}} f(z)\, dz}_{\text{residytm.}} - \underbrace{\int_{S_R} f(z)\, dz}_{\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ (ML)}} - \underbrace{\int_{-S_{r,a}} f(z)\, dz}_{\underset{r\to 0}{\longrightarrow} -\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)}$$

---

4. $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx}\, dx}$ / $\boxed{\text{pr.v. } \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-iwx}\, dx}$

Som i punkt 2 / 3 med $f(x) = g(x)e^{-iwx}$

Må velge $C_R/C_{r,R}$ i det halvplan der $|e^{-iwz}| \le 1$!