NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4110/TMA4115 Matematikk 3**

Fagleg kontakt under eksamen: Markus Szymik

Tlf: 411 16 793

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C, "Matematisk Formelsamling" av Karl Rottman er tillaten, og fylgjande enkle kalkulatorar er tillatne: Casio fx-82ES PLUS og Casio fx-82EX, Citizen SR-270X og Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 10

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
svart/kvit ☒	**fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1 (Komplekse tal)

a) Finn alle løysingar $z \in \mathbb{C}$ av likninga

$$z^3 + z^2 + z = -1$$

Skisser løysingane (lag ei teikning) i det komplekse planet. Skriv dei på forma $z = a + \mathrm{i}b$ der a og b er reelle, og på forma $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ der r og t er reelle.

b) Skriv ned Eulers formel for $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ med $t \in \mathbb{R}$.

c) Ein **addisjonsformel** for ein funksjon f er ein formel som uttrykker $f(x+y)$ ved $f(x)$ og $f(y)$. Skriv ned ein addisjonsformel for den komplekse eksponentialfunksjonen $f(z) = \mathrm{e}^z$.

d) La $z = a+ib$ vera eit komplekst tal. Finn reelle tal p og q slik at z tilfredsstiller likningane $z^2 + pz + q = 0$ og $\overline{z}^2 + p\overline{z} + q = 0$.

Oppgåve 2 (Lineære likningssystem)

a) Finn alle løysingar av likninga

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 63 \\ 51 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

b) Betrakt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og den korresponderande likninga $Ax = y$. For kva verdier av p er $x \in \mathbb{R}^p$? For kva verdier av q er $y \in \mathbb{R}^q$? Gje ein basis for rommet

$$\{ x \in \mathbb{R}^p \mid Ax = 0 \in \mathbb{R}^q \}$$

av løysingar til den homogene likninga.

Oppgåve 3 (Utspenning, lineært uavhengige vektorar, basis, dimensjon)

a) Betrakt vektorane

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 99 \\ 100 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$. Vis at dei spenner ut $\mathbb{R}^2$. Er dei lineært uavhengige? Grunngje svaret ditt!

b) Betrakt vektorane

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 99 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 2 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^{99}$. Er dei lineært uavhengige? Kva er dimensjonen til det lineære utspennet til vektorane? Grunngje svara dine!

c) Fullfør fylgjande definisjon: "Vektorane $v_1, \dots, v_n$ i eit vektorrom V dannar ein **basis** til V dersom..."

Oppgåve 4 (Matrisealgebra)

Gå ut frå at a, b, c og x, y, z er vilkårlege reelle tal; du kan ikkje velja spesifikke verdiar!

a) Rekn ut matriseproduktet

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z.

b) Kva er den inverse til matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c?

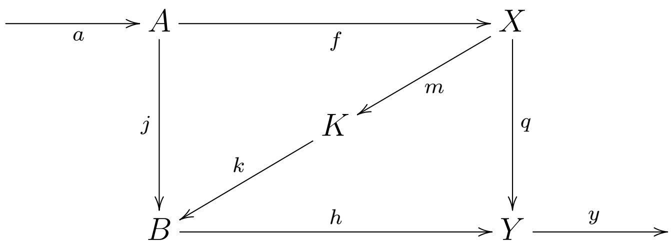
c) Kva er determinanten til matrisa

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}$$

uttrykt ved a, b, c og x, y, z?

Oppgåve 5 (Eit nettverk og ein markovprosess)

a) Kva er det lineære likningssystemet som skildrar flyten i fylgjande nettverk?



b) Kan du utleia ein relasjon mellom a og y? Grunngje!

Ifylgje meteorolog Y_r eksisterer det eit land N som er velsigna med mange ting, men ikkje med solrikt vêr. Det er aldri to dagar med sol på rad. Dersom det er sol ein dag, er det like stort sannsyn for at det regnar som at det snør den påfylgjande dagen. Dersom det er snø eller regn ein dag, er det like stort sannsyn for å få det same vêret - som å ikkje få det same vêret - den påfylgjande dagen. Dersom det er ei endring frå snø eller regn frå ein dag til den neste, er det berre halvparten av gongane sol den påfylgjande dagen.

c) Kva er den stokastiske matrisa for denne markovkjeda?

d) På lang sikt, kor mange dagar - av alle (i %) - er det sol?

Oppgåve 6 (Eigenverdiar og eigenvektorar)

a) La P vera ei kvadratisk matrise slik at $P^2 = P$. Vis at eigenverdiane til P berre kan vera 0 eller 1.

b) Gje eit eksempel på ei $(2,2)$–matrise P slik at $P^2 = P$ og som har eigenverdiar 0 **og** 1.

c) Gje eit eksempel på ei $(2,2)$–matrise P som har eigenverdiar 0 eller 1 eller begge, og som **ikkje** tilfredsstiller $P^2 = P$.

Oppgåve 7 (Andreordens lineære differensiallikningar)

a) La y_0, y_1, p og q vera gjevne reelle tal, og $f(t)$ ein funksjon som er ein million gongar deriverbar. Finst det **alltid** ein funksjon $y(t)$ som løyser den inhomogene likninga

$$y'' + py' + qy = f$$

med startverdiar $y(0) = y_0$ og $y'(0) = y_1$? Dersom det gjer det, gje ei kort grunngjeving. Dersom det ikkje gjer det, gje eit eksempel på y_0, y_1, p, q og $f(t)$ der det ikkje finst noka løysing.

b) La

$$y(t) = t\sin(t).$$

Finn reelle tal p og q, og ein reell funksjon $f(t)$, slik at y tilfredsstiller likninga $y'' + py' + qy = f$. Du kan sjekka om svaret ditt er riktig: gjer det!

c) For p og q som i **b)**, gje eit fundamentalt system av løysingar til den homogene likninga $y'' + py' + qy = 0$.

Oppgåve 8 (System av lineære differensiallikningar)

La λ og μ vera gjevne reelle tal der $\lambda \neq \mu \neq 0$, og betrakt matrisa

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu \end{bmatrix}.$$

a) Finn ein basis for rommet av løysingar $y(t)$ til den homogene likninga

$$y' = Ay.$$

b) Finn ei løysing til den homogene likninga $y' = Ay$ som tilfredsstiller startvilkåra

$$y'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgåve 9 (Minste kvadrats metode)

a) Finn koeffisientane a, b og c til det kvadratiske polynomet $f(z) = az^2 + bz + c$ som gjev best tilpassing til dei fylgjande fem datapunkta.

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Gje eit eksempel på ei matrise A slik at minste kvadrats 'løysing' av likninga $Ax = y$ **ikkje** er unik/eintydig? Grunngje påstandane dine!

c) For ei matrise A, la $A^\top$ vera den transponerte til matrisa. Vis at $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(AA^\top)$.

Oppgåve 10 (Euklidsk geometri)

a) La $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vera den ortogonale projeksjonen på diagonalen

$$D = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \}.$$

Kva for ei matrise skildrar denne lineære transformasjonen?
Kva er eigenverdiane og eigenvektorane?
Sjekk at dei numeriske svara dine stemmer overeins med geometrien!

b) La $b_1, \ldots, b_n$ vera ein ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$, og la $v = v_1 b_1 + \ldots v_n b_n$ vera ein vilkårleg vektor i $\mathbb{R}^n$. Vis at

$$|\langle v,\, b_k \rangle| \leqslant \| v \|$$

for alle $k = 1, \ldots, n$, der $\langle v,\, w \rangle = v^\top w$ er indreproduktet.

c) Kva er ei spektral-dekomponering til ei symmetrisk matrise med reelle koeffisientar? Skriv ned ein formel, og forklar!