EKSAMEN MA1202, 14. MAi 2004.

LØSNINGSFORSLAG

OBS!: Dette er et løsningsforslag — flere av oppgavene har også andre fullverdige løsninger.

Oppgave 1

a) Se på

$$\det(M_t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = t(0-3) - 1\cdot(-2-1)$$

$$= -3t + 3$$

Vi har at $\det(M_t) = 0 \iff t = 1$

Vurderer to tilfeller:

- Tilfelle 1: $t \neq 1$

Siden M_t er en 3×3 matrise, og $\det(M_t) \neq 0$ har vi at $\underline{\text{rang}(M_t) = 3}$ og $\underline{\text{nullity}(M_t) = 0}$

Videre vil radvektorene utspenne hele $\mathbb{R}^3$, så en basis for radrommet er (f.eks) $\underline{\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}}$ (standard basis for $\mathbb{R}^3$)

- Tilfelle 2: $t = 1$

Vi finner trappeformen til M_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M_1 på trappeform har 2 ledende 1

$\Rightarrow$ rank$(M_1) = 2$.

Dimensjonsteoremet for matriser gir videre at

nullity$(M_1) = 3 -$ rank$(M_t) = 3 - 2 = 1$

Vi vet at radrommet til en matrise ikke forandres ved elementære radoperasjoner, og at en basis for en matrise på trappeform er de radene med ledende 1. Av regningen over får vi dermed at en basis for rad-rommet til M_1 er: $\{(1,1,0), (0,1,-\frac{1}{2})\}$

b) Vi har at:

$$[T]_B = \left[[T(1)]_B \,\vdots\, [T(x)]_B \,\vdots\, [T(x^2)]_B \right]$$

Videre er:

$$T(1) = 2 + 2x + x^2 \Rightarrow [T(1)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = 1 + 0x + 3x^2 \Rightarrow [T(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = 0 + x - x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi observerer at $[T]_B = M_2$ fra a). Vi vet da at $\text{nullity}([T]_B) = 0$. Dette gir at $\underline{\ker(T) = \{\underline{0}\}}$. Videre er T en-entydig hvis og bare hvis $\ker(T) = \{\underline{0}\}$ – altså er T en-entydig.

Oppgave 2

a) La $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \in W$ og $k \in \mathbb{R}$.
Vi har at $u_1 + u_2 + u_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 0$.
Vil vise at $\underline{u} + \underline{v} \in W$, og $k\underline{u} \in W$ som vil være tilstrekkelig for å fastslå at W er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

1. $\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$;

$$\begin{aligned} &(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) \\ = &(u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3) \\ = &\quad 0 \quad + \quad 0 \quad = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{u} + \underline{v} \in W$

2. $k\underline{u} = (ku_1, ku_2, ku_3)$;

$$ku_1 + ku_2 + ku_3$$
$$= k(u_1 + u_2 + u_3)$$
$$= k \cdot 0 \qquad = 0$$
$$\Rightarrow k\underline{u} \in W$$

Altså er W et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Et plan i $\mathbb{R}^3$ har dimensjon 2, Videre ligger de ikke-parallelle vektorene $\underline{u}_1 = (1,-1,0)$ og $\underline{u}_2 = (1,0,-1)$ i W, og de utgjør dermed en basis for W.

Bruker Gram-Schmidt metoden på $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

1. Sett: $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$, og $W_1 = \text{span}\{\underline{v}_1\}$

2. $$\text{proj}_{W_1} \underline{u}_2 = \frac{\langle \underline{u}_2, \underline{v}_1 \rangle}{\|\underline{v}_1\|^2} \underline{v}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,0)$$

$$\underline{u}_2 - \text{proj}_{W_1} \underline{u}_2 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

Sett: $\underline{v}_2 = (1,1,-2)$

Normaliserer vektorene:

$$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{2}$$
$$\|\underline{v}_2\| = \sqrt{6}$$

Sett $\underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$\underline{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

Nå vil $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ være en ortonormal basis for W.

Oppgave 3

Se på

$$\det\left(\tfrac{3}{2}I - L\right) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 & -1 \\ -\frac{9}{17} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -1\left(\frac{27}{136}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{36}{17}\right)$$

$$= -\frac{27}{136} + \frac{3}{2}\left(\frac{153-144}{68}\right)$$

$$= -\frac{27}{136} + \frac{27}{136} = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en løsning av den karakteristiske likningen $\det(\lambda I - L) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$ er en egenverdi for L.

Siden to påfølgende elementer i rad 1 i L er $\neq 0$ vet vi at λ_1 er <u>den</u> positive, dominante egenverdien til L. Videre, siden $\lambda_1 > 1$, kan vi av dette slutte at populasjonen på sikt vil være voksende.

Oppgave 4

a) Dersom likningssettet er konsistent får vi av 1. likning at $x_1 = 1$. Av likning 2. følger det dermed at $x_2 = 0$.
D.v.s. $x_1 + 2x_2 = 1$, men dette samsvarer ikke med likning 3. Vi konkluderer med at likningsettet ikke har noen løsning.

På matriseform:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Den tilhørende normalformen $M^T M \underline{x} = M^T \underline{b}$ blir da:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Løsningen av dette likningsettet gir minste kvadraters løsning av det opprinnelige likningsystemet.

Utvidet matrise:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 7 \\ 6 & 14 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Minste kvadraters løsning er:

$$\underline{x_1 = 1 \ , \ x_2 = \frac{1}{2}}$$

b) Vi observerer at punktene ikke ligger på linje. Vi har at den beste tilnærmingen av en rett linje $y = a + bx$ til de gitte punktene er gitt ved $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ der $\underline{v}$ er minste kvadraters løsning av systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Denne fant vi i a), og dermed er linja gitt ved:

$$\underline{y = 1 + \frac{1}{2}x}$$

Oppgave 5

a) Se på

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 3+i & 3i & 4 \\ 3-i & 1 & -2 & 2+i \\ -3i & -2 & -1 & 3-i \\ 4 & 2-i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

Ser at $A^* = A$, altså er A hermitisk.

Vi vet at en matrise er unitært diagonaliserbar hvis og bare hvis den er normal. Siden A er hermitisk er den også normal ($A^*A = AA = AA^*$).

Konklusjon: A er unitært diagonaliserbar

b) Siden B er hermitisk finnes en unitær matrise P som diagonaliserer B. D.v.s $B = PDP^*$, der diagonalmatrisen D er reell siden egenverdiene til B er reelle. Nå er

$$\det(B) = \det(PDP^*) = \det(P)\det(D)\det(P^*) = \det(D)$$

Men, $\det(D)$ er lik produktet av egenverdiene til B — som er reelle. Dermed er $\det(B)$ reell.