NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: XXX

Tlf: XXX

Eksamensdato: august 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
sort/hvit ☒ **farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐

Dato Sign

Oppgave 1 Betrakt et likningsystem

$$y = \sin(\pi x),$$
$$x = (3.25 + y)^{1/2}.$$

Vi prøver å løse det ved hjelp av den følgende numeriske algoritmen: gitt $x_0 \in \mathbb{R}$, for $k = 0, 1, \dots$ beregn

$$y_k = \sin(\pi x_k),$$
$$x_{k+1} = (3.25 + y_k)^{1/2}.$$

Vis at $\lim_{k\to\infty}(x_{k+1} - 3/2)/(x_k - 3/2) = 0$ da vi begynner algoritmen med x_0 liggende i nærheten av $3/2$.

Solution: Our algorithm can be written as a fixed point iteration $x_{k+1} = (3.25 + \sin(\pi x_k))^{1/2} =: g(x_k)$, which has a fixed point at $x = 3/2$. Evaluating $g'(x) = 0.5\pi\cos(\pi x)(3.25 + \sin(\pi x_k))^{-1/2}$ at $x = 3/2$ reveals that $g'(3/2) = 0$, thereby implying the local superlinear convergence of the algorithm, which is exactly what we were asked to prove.

Oppgave 2

a) Finn polynomet $p(x)$ av *lavest mulig grad* som interpolerer funksjon $f(x) = x^{1/2}$ i punktene $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, og $x_3 = 9$.

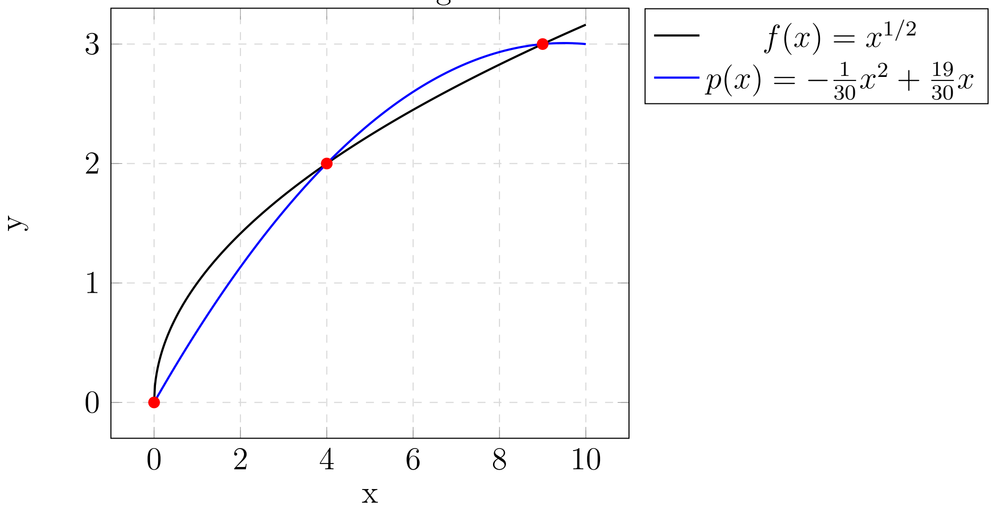
Solution: We will use Newton's divided differences to find the interpolation polynomial of lowest possible degree.

$$f[x_1] = 0, \quad f[x_2] = 2, \quad f[x_3] = 3,$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{2-0}{4-0} = 0.5, \quad f[x_2, x_3] = \frac{3-2}{9-4} = 0.2,$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{0.2-0.5}{9-0} = -\frac{1}{30}.$$

As a result we have

$$p(x) = 0 + 0.5(x-0) - \frac{1}{30}(x-0)(x-4) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{19}{30}x$$

The results can be seen in the figure below:



Polynomet $P(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer en glatt funksjon $F(x)$ i punktene $x_1, \ldots, x_n$ oppfyller følgende feilestimat:

$$F(x) - P(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{n!} F^{(n)}(c) =: S_{x_1,\ldots,x_n}(x) \frac{F^{(n)}(c)}{n!} \tag{1}$$

med $c \in [\min\{x, x_1, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_1, \ldots, x_n\}]$.

b) Vi bruker polynom-interpolasjon for å tilnærme en gitt tilfeldig glatt funksjon $F(x)$ på intervallet $[-1, 1]$. Vi har bestemt oss for å bruke $n = 2$ interpolasjonspunkter på intervallet. Bestem $\max_{x\in[-1,1]} |S_{x_1,x_2}(x)|$ i (1) i to tilfeller:

- uniformt fordelte noder $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;
- Chebyshev's interpolasjonsnoder som løser likningen $T_2(x_i) = \cos(2 \arccos(x_i)) = 0$ på intervallet $[-1, 1]$.

Basert på denne beregningen, bestem hvilket valg av interpolasjonspunkter forventes å gi minst feil.

Solution: We begin by computing the quantity $\max_{x\in[-1,1]} |S_{x_1,x_2}(x)|$ for the case of uniformly distributed nodes. In this case $S_{x_1,x_2}(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. The continuous function on an interval attains its minimum or maximum either at points when its derivative is 0 ($x = 0$ in the present case, owing to the symmetry, or from the direct computation $S'_{x_1,x_2}(x) = 2x$). Therefore, $\max_{x\in[-1,1]} |S_{x_1,x_2}(x)| = \max\{|S_{x_1,x_2}(-1)|, |S_{x_1,x_2}(0)|, |S_{x_1,x_2}(1)|\} = \max\{0, 1, 0\} = 1$.

Let us now move on to the Chebyshev nodes. Let us first find their positions:

$$T_2(x) = 0 \iff 2\arccos(x) = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Consequently, in this case we have $S_{x_1,x_2}(x) = (x - 2^{-1/2})(x + 2^{-1/2}) = x^2 - 0.5$. Same argumentation as previously applies, and therefore $\max_{x\in[-1,1]} |S_{x_1,x_2}(x)| = \max\{|S_{x_1,x_2}(-1)|, |S_{x_1,x_2}(0)|, |S_{x_1,x_2}(1)|\} = \max\{0.5, 0.5, 0.5\} = 0.5$.

Substituting these values into (1) we can see that for example for functions with constant $F''(\cdot)$ (i.e. quadratic polynomials), Chebyshev interpolation gives error of exactly half of that obtained based on uniform nodes.

Oppgave 3

a) Beregn en tilnærmelse til integralet

$$i = \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

ved hjelp av trapesregelen på 1 og 2 "paneler".

With one panel we compute

$$i \approx \frac{\pi/2 - 0}{2}(\sin(0) + \sin(\pi)) = 0,$$

while with two panels we get

$$i \approx \frac{\pi/4 - 0}{2}(\sin(0)+\sin(\pi/2))+\frac{\pi/2 - \pi/4}{2}(\sin(\pi/2)+\sin(\pi)) = \pi/4 \approx 0.785.$$

Note that the exact value of the integral is 1.

b) Feilestimatet for trapesregelen $Q_{[a,b]}f$ med ett panel er gitt av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[a,b]}f - \frac{h^3}{12}f''(c),$$

der c er et punkt mellom a og b, og $h = b - a$.

Basert på dette estimatet, vurder hvor mange (uniformt fordelte) paneler vi skal bruke slik at den absolute feilen i tilnærmelsen av integralet i gitt av (2) er mindre enn 10^{-2}.

Solution: We will use a very rough estimate here. Note that in our case we can bound $|f''(z)| = 4|\sin(2z)|$ globally on the whole integration domain by 4. Thus if we use N panels, $h = \pi/(2N)$, and on each panel the integration error is bounded by $4[\pi/(2N)]^3/12$. Summing up these N errors we get an error estimate $\pi^3/(24N^2)$, which we want to be less than 10^{-2}. Solving this inequality we see that $N \geq [\pi^3/(24 \cdot 10^{-2})]^{0.5} \approx 11.37$, which means that we need at least 12 panels (based on the utilized estimate).

Oppgave 4

a) Beregn $PA = LU$-faktoriseringen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution: FIXIT

```
L =

    1.0000         0         0
    1.0000    1.0000         0
    1.0000    0.5000    1.0000

U =

    1.0000    1.0000   -2.0000
         0    4.0000    3.0000
         0         0   -0.5000

P =

    1    0    0
    0    0    1
    0    1    0
```

b) Ved hjelp av beregningene i **a)**, bestem $x \in \mathbb{R}^3$ slik at $Ax = b = [8, 8, 6]^{\mathrm{T}}$.

Solution: FIXIT

```
>> P*b

ans =

     8
     6
     8

>> y = L\(P*b)

y =

    8
   -2
    1

>> x = U\y

x =

     3
     1
    -2
```

It is always a good idea to verify the computation: $Ax = b$.

c) Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kalles for en *øvre* Hessenbergmatrise hvis $A_{i,j} = 0$ for $i \geq j + 2$, og en *nedre* Hessenbergmatrise hvis $A_{i,j} = 0$ for $i \leq j - 2$.

Anta at vi har en implementasjon av LU-faktorisering (uten pivotering), som kan faktorisere en *øvre* Hessenbergmatrise av størrelse $n \times n$ og bruker bare $O(n^2)$ elementære operasjoner (addisjoner/subtraksjoner og multiplikasjoner/divisjoner). Forklar, hvordan vi kan løse et system av algebraiske likninger $Ax = b$, hvor $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er en *nedre* Hessenbergmatrise, ved hjelp av denne implementasjonen og bruke bare $O(n^2)$ elementare operasjoner i løsningsprosessen.

Solution: We know that A is a lower Hessenberg matrix, which means that A^{T} is an upper Hessenberg matrix. Let us use the provided factorization routine to compute $LU = A^{\mathrm{T}}$. Then $Ax = U^{\mathrm{T}}(L^{\mathrm{T}}x) = b$. Therefore we can proceed by solving two triangular systems $U^{\mathrm{T}}y = b$ and $L^{\mathrm{T}}x = y$. Each of these operations (including the transpositions, if one wants to be completely pedantic) involves $O(n^2)$ elementary operations, thus allowing us to solve the whole system in $O(n^2)$ operations, which is significanly smaller than $O(n^3)$ needed for a generic LU-factorization alone.

Oppgave 5 Besselfunksjon $J_0 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ defineres som en løsning av et initialverdiproblem

$$\begin{aligned} xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) &= 0, \quad x > 0 \\ J_0(0) &= 1, \\ J_0'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Skriv om likning (3) til et system av to førsteordens differensiallikninger på formen $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(0) = \hat{y}$.

Solution: We proceed in the standard fashion by introducing two unknowns, $y_0(x) = J_0(x)$ and $y_1(x) = J_0'(x)$, and putting $y(x) = [y_0(x), y_1(x)]^{\mathrm{T}}$. Then

$$y'(x) = \begin{bmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ -x^{-1}y_1(x) - y_0(x) \end{bmatrix} =: f(x, y(x)), \quad x > 0,$$

with $y(0) = [1, 0]^{\mathrm{T}} =: \hat{y}$.

b) Gjør en iterasjon med den implisitte Eulers metoden med skrittlengde $h = 0.1$ for dette ligningsystem.

Solution: Implicit Euler's method is given by the backwards difference formula

$$\frac{w_{k+1} - w_k}{h} = f(x_{k+1}, w_{k+1}).$$

For our ODE we obtain the system

$$\begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 + \frac{h}{x_k + h} \end{bmatrix} w_{k+1} = w_k.$$

After substituting the numbers (initial conditions etc) this results in

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 0.1 & 2 \end{bmatrix} w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad w_1 = \begin{bmatrix} 20/20.1 \\ -1/20.1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.995 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$