Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: XXX
Tlf: XXX

Eksamensdato: 30. mai 2017
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 6
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Betrakt likningen $f(x) = 0$, hvor $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$. Konstruer en fikspunktiterasjon med røttene til f som fikspunkter, og som konvergere lokalt i nærheten av roten $x = 2$.

Solution: There are many possibilities here, e.g.

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x - \alpha f(x) =: g(x),$$

form some $\alpha \neq 0$. Fixed point iteration converges locally provided that $|g'(x)| < 1$. In our case $|g'(2)| = |1-\alpha f'(2)| = |1-\alpha(3\cdot 4-12\cdot 2+11)| = |1-\alpha(12-24+11)| = |1-\alpha|$, and therefore the iteration converges locally around $x = 2$ provided that $0 < \alpha < 2$.

Oppgave 2 Chebyshevpolynomet $T_n(x)$ kan evalueres ved hjelp av de eksplisitte formlene:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)), & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left(\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n\right), & |x| \geq 1. \end{cases}$$

a) Finn polynomet $p(x)$ av *lavest mulig grad* som interpolerer $T_3(x)$ i punktene $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, og $x_3 = 1.0$.

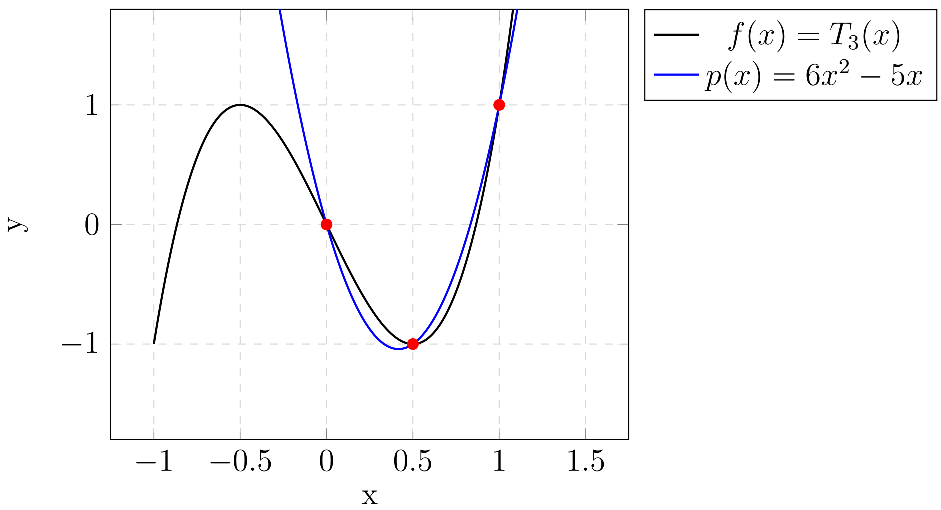
Solution: We will use Newton's divided differences to find the interpolation polynomial.

$$T_3[x_1] = 0, \quad T_3[x_2] = -1, \quad T_3[x_3] = 1,$$
$$T_3[x_1, x_2] = \frac{-1-0}{0.5-0} = -2, \quad T_3[x_2, x_3] = \frac{1-(-1)}{1-0.5} = 4,$$
$$T_3[x_1, x_2, x_3] = \frac{4-(-2)}{1-0} = 6.$$

As a result we have

$$p(x) = 0 - 2(x-0) + 6(x-0)(x-0.5) = 6x^2 - 5x.$$

The results can be seen in the figure below:



Polynomet $P(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer en glatt funksjon $F(x)$ i punktene $x_1, \ldots, x_n$ oppfyller følgende feilestimat:

$$F(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{n!} F^{(n)}(c),$$

med $c \in [\min\{x, x_1, \ldots, x_n\}, \max\{x, x_1, \ldots, x_n\}]$.

b) Anta at vi bruker $n = 4$ punkter på intervallet $[-2, 2]$ for å interpolere $T_3(x)$ med et polynom $p(x)$ av lavest mulig grad. Bestem interpolasjonefeilen $e = \max_{x\in[-2,2]} |T_3(x) - p(x)|$ i dette tilfellet.

Solution: Chebyshev polynomial $T_3(x)$ is a polynomial of degree 3. There is only one polynomial of degree ≤ 3 passing through 4 given points, which means that the lowest degree interpolation polynomial $p(x) = T_3(x)$, and therefore $e = 0$.

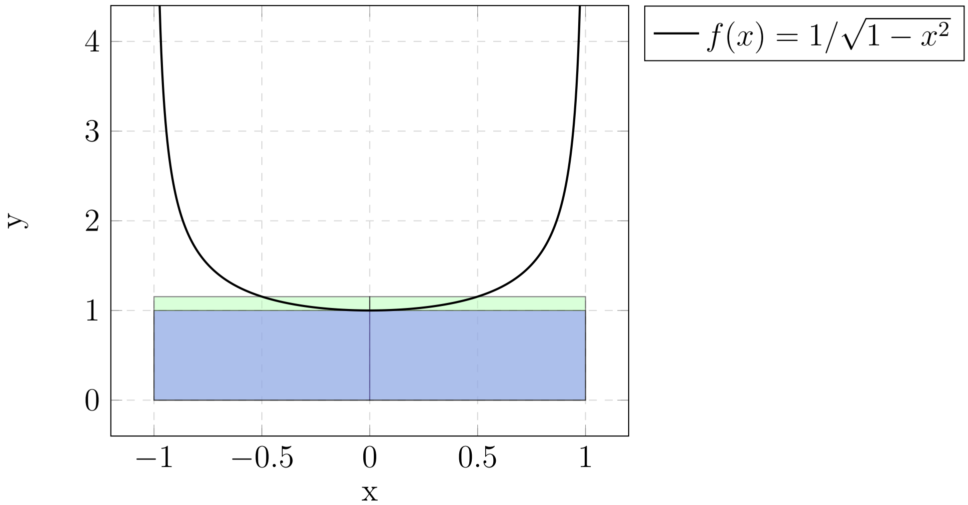
Oppgave 3

a) Beregn en tilnærmelse til integralet

$$i = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} \tag{1}$$

ved hjelp av midtpunktregelen på 1 og 2 “paneler”.

Solution: With one panel we get $i \approx 2/\sqrt{1-0^2} = 2$, and with two panels $i \approx 1/\sqrt{1-(-0.5)^2} + 1/\sqrt{1-(0.5)^2} \approx 2.31$. Note that the exact integral is $i = \arcsin(x)|_{x=-1}^{x=1} = \pi \approx 3.14$.



b) Feilestimatet for midtpunktregelen $Q_{[a,b]}f$ med ett panel er gitt av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[a,b]}f + \frac{h^3}{24}f''(c),$$

der c er et punkt mellom a og b, og $h = b - a$.

Bruk nå adaptive kvadraturer til å estimere forskjellen $i - Q_{[-1,1]}f$, for $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ og integralet i gitt av (1).

Solution: We get

$$i = Q_{[-1,1]}f + \frac{2^3}{24}f''(c) = Q_{[-1,0]}f + Q_{[0,1]}f + \frac{1^3}{24}f''(c_1) + \frac{2^3}{24}f''(c_2).$$

Assuming that $f''(c) \approx f''(c_1) \approx f''(c_2)$, and substituting the numbers from **a)**, we compute

$$\frac{6}{24}f''(c) = Q_{[-1,0]}f + Q_{[0,1]}f - Q_{[-1,1]}f \approx 2.31 - 2 = 0.31.$$

Therefore

$$i - Q[-1,1]f = \frac{2^3}{24}f''(c) = \frac{4}{3}0.31 \approx 0.41.$$

Note that this is a big underestimate of the true error, which is about $3.14 - 2 = 1.14$ in the present case. On the other hand the assumption $f''(c) \approx f''(c_1) \approx f''(c_2)$ about the slow varying second derivative is also not a very good one for the function we are integrating.

Oppgave 4

a) Beregn Cholesky-faktoriseringen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -21 \\ -21 & 53 \end{bmatrix}$$

Solution: One could either follow the algorithm from the textbook or derive it from scratch for this small matrix. Let

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Then

$$LL^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Thus $L_{11} = A_{11}^{1/2} = 3$, $L_{21} = A_{21}/L_{11} = -21/3 = -7$, and finally $L_{22} = (A_{22} - L_{21}^2)^{1/2} = (53 - (-7)^2)^{1/2} = 2$.

It is always a good idea to verify the computation: $A = LL^{\mathrm{T}}$.

b) Ved hjelp av beregningene i **a)**, bestem $x \in \mathbb{R}^2$ slik at $Ax = b = [3, -11]^{\mathrm{T}}$.

Solution: After the difficult part (factorization) is done, it only remains to solve two triangular systems. Let $Ly = b$; then $y_1 = b_1/L_{11} = 3/3 = 1$, and $-7y_1 + 2y_2 = -11$, from which we get $y_2 = -2$. Then $L^{\mathrm{T}}x = y$ implies $L_{22}x_2 = 2x_2 = y_2 = -2$, and therefore $x_2 = -1$. Finally $L_{11}x_1 + L_{21}x_2 = 3x_1 - 7x_2 = 3x_1 + 7 = y_1 = 1$, or $x_1 = -2$.

It is always a good idea to verify the computation: $Ax = b$.

c) Matrisen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kalles for øvre en Hessenbergmatrise hvis $A_{i,j} = 0$ for $i \geq j + 2$. Forklar hvor mange elementare operasjoner (addisjoner/subtraksjoner og multiplikasjoner/divisjoner) trengs det for å beregne LU-faktoriseringen uten pivotering av en slik matrise som en funksjon av matrisestørrelsen n. *Vi ønsker ikke det eksakte antallet men bare en størrelsesorden på formen $O(n^p)$.*

Solution: LU-factorization without pivoting amounts to elimination of non-zero elements under the diagonal of A using row operations. In each column (except the last one of course) we have exactly one non-zero subdiagonal element because of the upper Hessenberg structure of A. To eliminate such an element in column $i = 1, \dots n-1$ we need to subtract two rows (with appropriate scaling) of length $n-i+1$. Thus the total number of operations is proportional to $\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1) = (n-1)(n+1) - \sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1)(n+1) - (n-1)(1+n-1)/2 = n^2 - 1 - n^2/2 + n/2 = O(n^2)$, which is significantly smaller than $O(n^3)$ needed by the "standard" LU algorithm for square matrices.

Oppgave 5 Den implisitte midtpunktmetoden for å løse en differensiallikning $y'(t) = f(t, y(t))$ numerisk er en Runge–Kutta metode med ett nivå (stage), som gitt en approksimasjon w_n i tidspunkt t_n bestemmer w_{n+1} i tidspunkt $t_n + h$ fra følgende likninger:

$$\begin{aligned} c &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, w_n + \tfrac{h}{2}c), \\ w_{n+1} &= w_n + hc. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Betrakt et initialverdiproblem $y'(t) = i\xi y(t)$, $y(0) = \hat{y}$, hvor $i^2 = -1$ og $\xi \in \mathbb{R}$. Vi vet at løsningen oppfyller $|y(t)| = |\hat{y}|$ for alle t, hvor $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ er absoluttverdien av et kompleks tal.

Anta at vi bruker den implisitte midtpunktmetoden for å beregne en numerisk approksimasjon w_n, $n = 0, 1, \dots$, til løsningen $y(t_n)$, hvor $t_n = nh$, $h > 0$, $n = 0, 1, \dots$ Vis at $|w_n| = |\hat{y}|$, $n = 0, 1, \dots$, uavhengig fra steglengden $h > 0$.

Solution: For $n = 0$ we have $w_0 = \hat{y}$, and therefore $|w_0| = |\hat{y}|$. We will show that $|w_{n+1}| = |w_n|$, which then implies the claim by induction.

For our ODE we can explicitly compute c in (2):

$$c = f(w_n + \tfrac{h}{2}c) \quad\Longleftrightarrow\quad c = i\xi(w_n + \tfrac{h}{2}c) \quad\Longleftrightarrow\quad c = \frac{i\xi}{1 - i\xi h/2}c,$$

from which we compute

$$w_{n+1} = w_n + hc = \frac{1 + i\xi h/2}{1 - i\xi h/2} w_n.$$

Therefore

$$|w_{n+1}| = \left|\frac{1 + i\xi h/2}{1 - i\xi h/2}\right| |w_n| = \left[\left(\frac{1 + i\xi h/2}{1 - i\xi h/2}\right)\left(\frac{1 - i\xi h/2}{1 + i\xi h/2}\right)\right]^{1/2} |w_n| = |w_n|,$$

which concludes the proof.

I deloppgavene **b)** og **c)** betrakter vi et matematisk pendel som kan modelleres ved hjelp av et initialverdiproblem

$$\begin{aligned} \theta''(t) + \sin(\theta(t)) &= 0, \\ \theta(0) &= \hat{\theta}_0, \\ \theta'(0) &= \hat{\theta}_1. \end{aligned} \tag{3}$$

b) Skriv om likning (3) til et system av to førsteordens differensiallikninger på formen $y'(t) = f(t, y(t))$.

Solution: We put $y_0(t) = \theta(t)$, $y_1(t) = \theta'(t)$. Then

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ -\sin(y_0(t)) \end{bmatrix} =: f(y(t))$$

c) La $h = 1$, $\hat{y}_0 = 0$ og $\hat{y}_1 = 1$. Vi er nå i ferd med å gjøre et steg med den implisitte midpunktmetoden, og skal finne en tilnærmelse til c. Sett opp det ikke-lineære ligningssystemet og gjør en iterasjon med Newtons metode, med startverdier $c^{(0)} = (0, 0)$.

Solution: Given that $w_0 = (\hat{y}_0, \hat{y}_1)$ the system we would like to solve is

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 + \frac{h}{2}c_1 \\ -\sin(\hat{y}_0 + \frac{h}{2}c_0) \end{bmatrix}, \qquad \iff \qquad \begin{cases} c_0 - \frac{h}{2}c_1 - \hat{y}_1 = 0, \\ \sin(\hat{y}_0 + \frac{h}{2}c_0) + c_1 = 0. \end{cases}$$

Jacobian of this system of equations is

$$J(c) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ \frac{h}{2}\cos(\hat{y}_0 + \frac{h}{2}c_0) & 1 \end{bmatrix}$$

Thus the Newton's system can be stated as

$$J(c^{(0)})(c^{(1)} - c^{(0)}) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1 - c_0^{(0)} + \frac{h}{2}c_1^{(1)} \\ -\sin(\hat{y}_0 + \frac{h}{2}c_0^{(0)}) - c_1^{(0)} \end{bmatrix},$$

or, after substituting the numbers,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

This results in $c^{(1)} = (4/5, -2/5)$.