Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: Anton Evgrafov
Tlf: 4503 0163

Eksamensdato: 08. august 2017
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi betrakter en likning

$$\tan(x) = 1, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{1}$$

Vi vet at minst en rot x tilhører intervallet $(0, 1)$ fordi $\tan(0) = 0$ og $\tan(1) \approx 1.6$. Bruk halveringsmetoden til å finne en numerisk tilnærming $\hat{x}$ til denne roten x slik at forskjellen $|\hat{x} - x|$ er garantert mindre enn 0.1. (Vi antar at roten er ukjent, ellers trenger vi ikke å løse likningen.)

Oppgave 2

a) En Euler–Bernoulli bjelke (som dere har sett i prosjekt 2) kan betraktes matematisk som en kurve $q(x)$ som oppfyller en differensiallikning

$$q''''(x) = 0, \tag{2}$$

med passende randbetingelsene.

Hvor mange muligheter finnes det for bjelker som passerer gjennom punktene $(0, 1)$, $(2, 2)$, $(3, -2)$? Beskriv funksjonen $q(x)$ for slike bjelker, og gi et specifikk eksempel.

Polynomet $P_n(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer en glatt funksjon $F(x)$ i punktene $x_1, \dots, x_n$ oppfyller følgende feilestimat:

$$F(x) - P_n(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_n)}{n!} F^{(n)}(c), \tag{3}$$

med $c \in [\min\{x, x_1, \dots, x_n\}, \max\{x, x_1, \dots, x_n\}]$.

b) Vi betrakter en funksjon $F(x) = \cos(x)$ på intervallet $[0, 2]$ og interpolerer den i punktene $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 2$ ved hjelp av et polynom P_n av lavest mulig grad. Finn n slik at feilen $e = \max_{x \in [0,2]} |F(x) - P_n(x)| < 0.1$ uansett hvordan punktene $x_1, \dots, x_n$ plasseres på intervallet.

Oppgave 3

a) Beregn en tilnærmelse til integralet

$$i = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$$

ved hjelp av midtpunktregelen basert på 1 og 2 "paneler".

b) Vi vil tilnærme et integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av et numerisk kvadratur $Q_{[0,1]}f = w_1 f(0.25) + w_2 f(0.75)$. Bestem vektene w_i slik at kvadraturet $Q_{[0,1]}f$ har høyest mulig presisjonsgrad[1] på intervallet $[0,1]$. Rapporter presisjonsgraden du har funnet.

Oppgave 4 Vi betrakter to ladninger (i en dimensjon) med posisjoner $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i tidspunkt $t > 0$. Ladningenes posisjon oppfyller et system av to differensiallikninger (Coulombs + Newtons lover):

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -\frac{1}{(x_1(t) - x_2(t))^2}, \\ x_2''(t) &= \frac{1}{(x_1(t) - x_2(t))^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

med begynnelsesbetingelsene $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_2'(0) = 0$.

a) Skriv om (4) til et system av førsteordens differensiallikninger.

b) Gjør et steg med den *eksplisitte trapesmetoden* (Heuns metode) for systemet funnet i **a)** med tidsdiskretisering $h = 0.1$.

Oppgave 5

a) Beregn Cholesky–faktoriseringen av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Ved hjelp av beregningene i **a)**, bestem $x \in \mathbb{R}^2$ slik at $Ax = b = [1, -14]^{\mathrm{T}}$.

c) Med A og b som i **a)** og **b)**, gjør en iterasjon med Gauss–Seidel metoden med startverdi $x^{(0)} = [1, 2]$.

---

[1] Høyest mulig grad av et vilkårlig polynom $p(x)$ som integreres uten feil, dvs $\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[0,1]}p$