Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: Anton Evgrafov
Tlf: 4503 0163

Eksamensdato: xx. august 2016
Eksamenstid (fra–til): xx:xx–xx:xx
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Spesifiserte trykte hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato   Sign

Oppgave 1

a) Vi ser på likningen

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Foreslå en fikstpunktiterasjon for denne likningen og bestem, om denne iterasjonen konvergerer lokalt[1] mot røttene til denne likningen.

Oppgave 2

a) Finn det polynomet $p(x)$ av *lavest mulig grad* som passer igjennom punktene $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$.

b) La $p_n(x)$ være polynomet av *lavest mulig grad* som interpolerer funksjonen $f(x) = \cos(x)$ i punktene $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $\dots$, $x_n = \frac{2n-1}{2}\pi$. Formelen for estimatet av interpolasjonsfeilen er gitt av

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{n!} f^{(n)}(c_{n,x}), \tag{1}$$

hvor punktet $c_{n,x} \in [\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_n\}]$ avhenger fra n og x.

La oss se på punktet $x = 0$ i estimatet (1). Bestem $p_n(x)$ og vis at $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(c_{n,0}) = 0$ (hint: vurder de forskjellige led i estimatet (1)).

Oppgave 3

a) Beregn tilnærmelse av integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ ved hjælp av midpunkt og trapezoid kvadraturer. Bruk $n = 2$ paneler.

b) La $M_{[a,b]}f$ og $T_{[a,b]}f$ være midpunkt og trapezoid kvadraturer med $n = 1$ panel for funksjonen f på interval $[a, b]$. Feilestimatetene for disse kvadraturer er gitt av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = M_{[a,b]}f + \frac{h^3}{24} f''(c) + O(h^4), \qquad \text{og}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_{[a,b]}f - \frac{h^3}{12} f''(c) + O(h^4),$$

hvor $c = (a + b)/2$, og $h = b - a$.

[1] Lokalt=når startpunktet x_0 er tett til en rot.

La oss definere en ny kvadratur som $Q_{[a,b]}f = \alpha M_{[a,b]}f + \beta T_{[a,b]}f$. Bestem verdiene α, β slik at

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[a,b]}f + O(h^4).$$

c) La $p_0(x) = 1$. Finn et polynom $p_1(x)$ av grad 1 som er ortogonal mot p_0 på intervallet $[0,1]$.

Oppgave 4 Vi skal nå se på et initialverdiproblem:

$$y''(t) = -(y(t))^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

a) Betrakt den følgende Runge–Kutta metoden med to steg[2]:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, w_n), \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{2}{3}h, w_n + \tfrac{2}{3}hk_1), \\ w_{n+1} &= w_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{3}{4}k_2), \end{aligned} \tag{3}$$

som tilnærmer en løsning til et initialverdiproblem $w'(t) = f(t, w(t))$.

Bruk denne metoden med $h = 0.5$ til å finne en tilnærmelse til løsningen av (2) i $t = 0.5$.

b) Den lokale trunkeringsfeilen av (den eksplisite) Eulersmetoden oppfører seg som $O(h^2)$ for små h, mens metoden (3) har den lokale trunkerigsfeilen av størrelsen $O(h^3)$.

Bruk den eksplisite Eulersmetoden med $h = 0.5$ til å finne en tilnærmelse til løsningen av (2) i $t = 0.5$. Basert på beregningene i **a)** vurder den lokale trunkeringsfeilen av Eulersmetoden i dette tilfelle.

Videre, bestem steglengden h^* slik at Eulersmetoden gir den lokale trunkeringsfeilen av størrelsen $\approx 1.0 \cdot 10^{-4}$.

Oppgave 5

a) Beregn den diskrete Fouriertransformasjonen av $x = [1, i, -i]^{\mathrm{T}}$, hvor $i^2 = -1$.

b) Bruk resultaten fra **a)** til å beregne den *inverse* diskrete Fouriertransformasjonen av den konjugerte vektoren $\bar{x} = [1, -i, i]^{\mathrm{T}}$.

---

[2] “stages” i boken