Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: Anton Evgrafov
Tlf: 4503 0163

Eksamensdato: 06. juni 2016
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Vi ser på likningen

$$e^x - y = 0,$$

hvor $y > 0$ er gitt, og $x \in \mathbb{R}$ er ukjent.

a) Formuler Newtons metode for å løse denne likningen. Gjør to iterasjoner for hånd for $y = e$. Start med $x_0 = 0$.

Oppgave 2

a) Finn det polynomet $p(x)$ av *lavest mulig grad* som interpolerer funksjonen $f(x) = \sqrt{|x|}$ i punktene $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$.

Vi bruker samme notasjon for $f(x)$ og $p(x)$ som i **a)** i resten av oppgaven.

b) Funksjonen $F(x) = x$ er lik med $(f(x))^2$ for $x \geq 0$. Derfor interpolerer $P(x) = (p(x))^2$ funksjonen $F(x)$ i punktene $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ og $x_3 = 9$.

Forklar hvorfor formelen for estimatet av interpolasjonsfeilen, gitt av

$$F(x) - P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!} F'''(c),$$

med $c \in [\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_3\}]$, *ikke* holder i denne situasjonen.

Oppgave 3

a) Approksimer integralet $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ ved å bruke midtpunktskvadraturer med $n = 1$ og $n = 2$ delintervaller.[1]

b) Hvis vi antar at f'' er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, er feilestimatet for midtpunktskvadraturet $Q_{[a,b]}f$ gitt av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[a,b]}f + \frac{h^3}{24} f''(c),$$

der c er et punkt mellom a og b, og $h = b - a$.

Bruk nå adaptive kvadraturer til å estimere forskjellen $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x - Q_{[0,1]}\ln$. (Ignorer det at ln på intervallet $[0, 1]$ ikke oppfyller deriverbarhetskravet i feilestimatet.) Du kan gjenbruke de numeriske beregningene fra **a)**.

[1] delintervaller = "panels" i boken

Oppgave 4 Vi skal nå se på et initialverdiproblem:

$$y'(t) = -(y(t))^2, \qquad y(0) = 1.$$

Løsningen av differensiallikningen er $y(t) = (t+1)^{-1}$.

a) Regn ut to steg av y numerisk ved hjelp av den eksplisitte Eulermetoden. Bruk steglengde $h = 1$.

b) Formuler den implisitte Eulermetoden (med tilfeldig $h_i = t_{i+1} - t_i > 0$) for problemet. Vis at andregradslikningen som framkommer i metoden har to reelle røtter for approksimasjonen $w_{i+1} \approx y(t_{i+1})$ gitt av $w_i \approx y(t_i)$ og h_i, gitt at h_i er "liten nok". Finn de eksplisitte utrykkene for røttene og forklar hvilken av dem som bør velges i metoden.

Oppgave 5

a) Beregn den diskrete Fouriertransformasjonen av $x = [1, 2, 3]^{\mathrm{T}}$.

b) La $y = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$ være den diskrete Fouriertransformasjonen av vektoren $x = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$.

Nå konstruerer vi vektoren $\hat{x} = [x_0, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1]^{\mathrm{T}}$. Vis at den har en diskret Fouriertransformasjon gitt som $\hat{y} = [y_0, y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1]^{\mathrm{T}}$.

c) La $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$, og $t_j = c + j(d-c)/n$, $j = 0, \ldots, n-1$ være en samling av uniformt distribuerte punkter på intervallet $[c, d]$. Vi vil finne en kurve som passerer gjennom(interpolerer) punktene i datasettet $(t_0, x_0), \ldots, (t_{n-1}, x_{n-1})$.

I dette kurset har vi sett på to mulige metoder for å gjøre dette: polynominterpolasjon, (her vist i Newtons form)

$$P(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + \cdots + f[t_0, \ldots, t_{n-1}](t - t_0) \cdots (t - t_{n-2}),$$

og trigonometrisk interpolasjon:

$$Q(t_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \exp\{i2\pi kj/n\} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \exp\left\{\frac{i2\pi k(t_j - c)}{d - c}\right\} / \sqrt{n}.$$

Gi et overslag på antallet av elementære operasjoner[2] som trengs til å beregne:

[2] Elementære operasjoner $\approx$ addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon

- *alle* Newtons differanser[3] $f[t_0], f[t_0, t_1], \ldots, f[t_0, \ldots, t_{n-1}]$;
- *alle* trigonometriske interpolasjonskoeffisientene $y_0, \ldots, y_{n-1}$ ved hjælp av FFT algoritmen.

Sammenlign to vurderingene og bestem, hva er raskest for store n.

[3] Newton's divided differences