NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4320 Introduksjon til vitenskapelige beregninger

Faglig kontakt under eksamen: Anton Evgrafov

Tlf: 4503 0163

Eksamensdato: xx. august 2016

Eksamenstid (fra–til): xx:xx–xx:xx

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: B: Spesifiserte trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt:

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling

Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Vi ser på likningen

$$x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Foreslå en fikstpunktiterasjon for dene likningen og bestem, om denne iterasjonen konvergerer lokalt[1] mot røttene til denne likningen.

Solution: There are many possibilities here; e.g. one could try Newton's method, which for this equation is given by

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 + 3x_k - 4}{2x_k + 3} = \frac{x_k^2 + 4}{2x_k + 3} =: g_{\text{Newton}}(x_k).$$

Another example is given by

$$x_{k+1} = \frac{4 - x_k^2}{3} =: \tilde{g}(x_k).$$

In any case, a fixed point iteration converges locally around a root $\hat{x}$ if $|g'(\hat{x})| < 1$. In our case the equation has two roots $\hat{x}_1 = 1$ and $\hat{x}_2 = -4$. We have $\tilde{g}'(x) = -2x/3$, thus the iteration based on $\tilde{g}$ converges locally near $\hat{x}_1$ and diverges near $\hat{x}_2$. In the case of Newton's iteration we have $g'_{\text{Newton}}(\hat{x}_1) = g'_{\text{Newton}}(\hat{x}_2) = 0$, so the method converges locally in the vicinity of either root.

For example, if we use $\tilde{g}$:

x_0	2.0000	−4.0001
x_1	0.0000	−4.0003
x_2	1.3333	−4.0007
x_3	0.7407	−4.0019
x_4	1.1504	−4.0051
x_5	0.8922	−4.0135
x_6	1.0680	−4.0361
x_7	0.9531	−4.0966
x_8	1.0305	−4.2607
x_9	0.9793	−4.7178
x_{10}	1.0136	−6.0857

while if we use g_{Newton}:

x_0	2.0000	−6.0000
x_1	1.1429	−4.4444
x_2	1.0039	−4.0335
x_3	1.0000	−4.0002
x_4	1.0000	−4.0000

[1] Lokalt=når startpunktet x_0 er tett til en rot.

Oppgave 2

a) Finn det polynomet $p(x)$ av *lavest mulig grad* som passer igjennom punktene $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(3,1)$.

Solution: we can for example use Newton's form of the interpolation polynomial.

$$\begin{array}{rlrlrlrl}
x_1 &= 0 & x_2 &= 1 & x_3 &= 2 & x_4 &= 3 \\
f[x_1] &= 0 & f[x_2] &= 1 & f[x_3] &= 1 & f[x_4] &= 1 \\
f[x_1,x_2] &= 1 & f[x_2,x_3] &= 0 & f[x_3,x_4] &= 0 & & \\
f[x_1,x_2,x_3] &= -1/2 & f[x_2,x_3,x_4] &= 0 & & & & \\
f[x_1,x_2,x_3,x_4] &= 1/6 & & & & & &
\end{array}$$

Thus the sought polynomial is

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0 + 1(x-0) - \frac{1}{2}(x-0)(x-1) + \frac{1}{6}(x-0)(x-1)(x-2) \\
&= \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) - \frac{1}{2}(x^2 - x) + x \\
&= \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x.
\end{aligned}$$

b) La $p_n(x)$ være polynomet av *lavest mulig grad* som interpolerer funksjonen $f(x) = \cos(x)$ i punktene $x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$, $\ldots$, $x_n = \frac{2n-1}{2}\pi$. Formelen for estimatet av interpolasjonsfeilen er gitt av

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c_{n,x}), \tag{1}$$

hvor punktet $c_{n,x} \in [\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_n\}]$ avhenger fra n og x.

La oss se på punktet $x = 0$ i estimatet (1). Bestem $p_n(x)$ og vis at $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(c_{n,0}) = 0$ (hint: vurder de forskjellige led i estimatet (1)).

Solution: First of all $f(x_i) = 0$ for all i, and therefore the interpolation polynomial of lowest degree is $p_n(x) = 0$. Thus the left hand side of the estimate (1) at $x = 0$ is $f(0) - p_n(0) = 1 - 0 = 1$. Furthermore, $\lim_{n\to\infty} |(0 - x_1)(0 - x_2)\cdots(0 - x_n)/n!| = \lim_{n\to\infty} |(-\pi/2)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)| \geq \lim_{n\to\infty} |(\pi/2)^n| = +\infty$. As a consequence, $\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(c_{n,0}) = 0$.

Oppgave 3

a) Beregn tilnærmelse av integral $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ ved hjælp av midpunkt og trapezoid kvadraturer. Bruk $n = 2$ paneler.

Solution: direct computation.

Midpoint quadrature with two panels:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}[\sqrt{0.25} + \sqrt{0.75}] = [1 + \sqrt{3}]/4 \approx 0.6830.$$

Trapezoid rule with two panels:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{4}[\sqrt{0} + \sqrt{0.5}] + \frac{1}{4}[\sqrt{0.5} + \sqrt{1}] \approx 0.6036.$$

Note that in the present case the exact integral is $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 2/3[x^{3/2}]_0^1 = 2/3 \approx 0.6666$.

b) La $M_{[a,b]}f$ og $T_{[a,b]}f$ være midpunkt og trapezoid kvadraturer med $n = 1$ panel for funksjonen f på interval $[a, b]$. Feilestimatetene for disse kvadraturer er gitt av

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = M_{[a,b]}f + \frac{h^3}{24}f''(c) + O(h^4), \qquad \text{og}$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = T_{[a,b]}f - \frac{h^3}{12}f''(c) + O(h^4),$$

hvor $c = (a + b)/2$, og $h = b - a$.

La oss definere en ny kvadratur som $Q_{[a,b]}f = \alpha M_{[a,b]}f + \beta T_{[a,b]}f$. Bestem verdiene α, β slik at

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = Q_{[a,b]}f + O(h^4).$$

Solution: We have

$$M_{[a,b]}f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h^3}{24}f''(c) + O(h^4), \qquad \text{og}$$
$$T_{[a,b]}f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{h^3}{12}f''(c) + O(h^4),$$

and therefore

$$Q_{[a,b]}f = (\alpha + \beta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (2\beta - \alpha)\frac{h^3}{24} + O(h^4).$$

As a result we get a system of equations

$$\alpha + \beta = 1,$$
$$2\beta - \alpha = 0.$$

Thus $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$, which in fact gives us Simpson's rule:

$$\frac{2}{3} M_{[a,b]} f + \frac{1}{3} T_{[a,b]} f = \frac{2h}{3} f(c) + \frac{h}{6}(f(a) + f(b)) = \frac{h}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)].$$

c) La $p_0(x) = 1$. Finn et polynom $p_1(x)$ av grad 1 som er ortogonal mot p_0 på intervallet $[0, 1]$.

Solution: There are infinitely many polynomials of degree 1 which satisfy the orthogonality condition, and there are many ways of finding them. For example, we could start with $\tilde{p}(x) = x$ and orthogonalize this polynomial with respect to p_0 to obtain p_1.

$$\int_0^1 \tilde{p}(x) p_0(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 p_0(x) p_0(x)\, \mathrm{d}x = 1,$$

and therefore we can chose

$$p_1(x) = \tilde{p}(x) - \frac{1}{2} p_0(x)/1 = x - \frac{1}{2}.$$

One can easily check the orthogonality condition

$$\int_0^1 p_1(x) p_0(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Oppgave 4 Vi skal nå se på et initialverdiproblem:

$$y''(t) = -(y(t))^2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

a) Betrakt den følgende Runge–Kutta metoden med to steg[2]:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, w_n), \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{2}{3}h, w_n + \tfrac{2}{3}hk_1), \\ w_{n+1} &= w_n + h(\tfrac{1}{4}k_1 + \tfrac{3}{4}k_2), \end{aligned} \tag{3}$$

[2] "stages" i boken

som tilnærmer en løsning til et initialverdiproblem $w'(t) = f(t, w(t))$.

Bruk denne metoden med $h = 0.5$ til å finne en tilnærmelse til løsningen av (2) i $t = 0.5$.

Solution: First of all we rewrite the problem as a system of two first order ODEs:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -(y_1(t))^2 \end{pmatrix} =: F \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Now we can start the computation: $w_0 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$; $k_1 = (0, -1)^{\mathrm{T}}$, $k_2 = F(w_0 + \frac{1}{3}k_1) = F(1, -\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3}, -1)^{\mathrm{T}}$, $w_1 = (0.8750, -0.5000)^{\mathrm{T}}$.

Therefore we get $y(0.5) \approx 0.8750$, $y'(0.5) \approx -0.5$.

b) Den lokale trunkeringsfeilen av (den eksplisite) Eulersmetoden oppfører seg som $O(h^2)$ for små h, mens metoden (3) har den lokale trunkerigsfeilen av størrelsen $O(h^3)$.

Bruk den eksplisite Eulersmetoden med $h = 0.5$ til å finne en tilnærmelse til løsningen av (2) i $t = 0.5$. Basert på beregningene i **a)** vurder den lokale trunkeringsfeilen av Eulersmetoden i dette tilfelle.

Videre, bestem steglengden h^* slik at Eulersmetoden gir den lokale trunkeringsfeilen av størrelsen $\approx 1.0 \cdot 10^{-4}$.

Solution: Let us first find the explicit Euler approximation of the solution: $w_1^{\text{Euler}} = w_0 + hk_1 = (1, -0.5)^{\mathrm{T}}$. Assuming that we can neglect the error of the more accurate method (3), we estimate the error of Euler method simply as $e_1 = w_1^{\text{Euler}} - w_1 = (0.125, 0)^{\mathrm{T}}$. Now assuming that the error behaves as ch^2, we can find h^* from the system of equations:

$$\begin{aligned} c0.5^2 &= 0.125, \\ c(h^*)^2 &= 1.0 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

and therefore $h^* = 0.5(1.0 \cdot 10^{-4}/0.125)^{1/2} \approx 0.0141$.

Just as a quick verification we can recompute w_1, w_1^{Euler} with $h^* = 0.0141$: $w_1 \approx (0.9999, -0.0141)^{\mathrm{T}}$, $w_1^{\text{Euler}} \approx (1, -0.0141)^{\mathrm{T}}$, $e_1 = (0.0001, 0)^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 5

a) Beregn den diskrete Fouriertransformasjonen av $x = [1, i, -i]^{\mathrm{T}}$, hvor $i^2 = -1$.

Solution: direct computation.

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{3-1} x_j \exp\{-i2\pi j0/3\} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + i - i] = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{3-1} x_j \exp\{-i2\pi j1/3\} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \exp\{0\} + i \exp\{-i2\pi/3\} - i \exp\{-i4\pi/3\}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + i\{-1/2 - i\sqrt{3}/2\} - i\{-1/2 + i\sqrt{3}/2\}] = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + \sqrt{3}] \\ &= 1 + 1/\sqrt{3} \approx 1.5774. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{3-1} x_j \exp\{-i2\pi j2/3\} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 \exp\{0\} + i \exp\{-i4\pi/3\} - i \exp\{-i8\pi/3\}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}[1 + i\{-1/2 + i\sqrt{3}/2\} - i\{-1/2 - i\sqrt{3}/2\}] = \frac{1}{\sqrt{3}}[1 - \sqrt{3}] \\ &= -1 + 1/\sqrt{3} \approx -0.4226. \end{aligned}$$

b) Bruk resultaten fra **a)** til å beregne den *inverse* diskrete Fouriertransformasjonen av den konjugerte vektoren $\bar{x} = [1, -i, i]^{\mathrm{T}}$.

Solution: let F_3 be the 3×3 matrix representing the discrete Fourier transform, thus in **a)** we have computed $y = F_3 x$. Since $F_3^{-1} = \bar{F}_3$, we have $F_3^{-1}\bar{x} = \bar{F}_3\bar{x} = \bar{y} = y$. Thus the answer is the same as in **a)**.