Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4305 Partielle differensialligninger
4. desember 2020

Oppgave 1 Finn en løsning u til $u_t + \frac{1}{3}(u^3)_x = 0$, gyldig for alle $x \in \mathbb{R}$ og små positive t, med initialdata

$$u(0,x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ x-1 & 0 \le x \le 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Til hvilken tid opphører en klassisk løsning å eksistere? Hva hender deretter?

Oppgave 2 Anta at $u \in C\big([0,T] \times \overline{\Omega}\big) \cap C^2\big((0,T) \times \Omega\big)$ tilfredsstiller

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= u - u^3 && \text{i } (0,T) \times \Omega, \\ |u| &\le 1 && \text{i } \big(\{0\} \times \Omega\big) \cup \big([0,T] \times \partial\Omega\big), \end{aligned}$$

der $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ er et begrenset område. Vis at da er $|u| \le 1$ i $[0,T] \times \overline{\Omega}$.

Oppgave 3 Vis at dersom u er en positiv harmonisk funksjon på et område $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, så er

$$|\nabla u(\boldsymbol{x})| \le \frac{n\, u(x)}{\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega)}$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \Omega$, der $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) = \inf\big\{\, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \,\big|\, \boldsymbol{y} \in \partial\Omega \,\big\}$.

Dersom $\Omega = \mathbb{R}^n$, definerer vi $\operatorname{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) = \infty$. Vis at u er konstant i dette tilfellet.

Hint: Det er minst tre veier til målet: Bruk Harnacks ulikhet, eller Poissons integralformel, eller (kanskje enklest) tilpass beviset for Proposition 6 i notatet *Harmonicfunctionology*.

Oppgave 4 Anta at $u \in C(\mathbb{R}^n)$ er harmonisk i øvre halvrom $\big\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, x_n > 0 \,\big\}$, og antisymmetrisk i x_n; dvs.

$$u\big(\sigma(\boldsymbol{x})\big) = -u(\boldsymbol{x}), \quad \text{der } \sigma(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n).$$

Vis at u er harmonisk i $\mathbb{R}^n$.

Hint: Det er trivielt å vise at u også er harmonisk i nedre halvrom $x_n < 0$. Problemet er i $x_n = 0$. Gitt et reelt tall $r > 0$, betrakt ballen B med radius r, sentrert i $\mathbf{0}$. Konstruer en passende harmonisk funksjon på B og vis at den sammenfaller med u i B. For det vil du også få bruk for «øvre halvball» $\big\{\, \boldsymbol{x} \in B \,\big|\, x_n > 0 \,\big\}$. Bruk antisymmetrien for alt den er verdt.

Oppgave 5 *I denne oppgaven står indekser på funksjoner* ikke *for partiellderiverte. I stedet, gitt en funksjon av fire variabler $\psi(t, \boldsymbol{x})$ med $t \in \mathbb{R}$ og $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, skriver vi $\psi_t(\boldsymbol{x}) = \psi(t, \boldsymbol{x})$. Tenk på det som en funksjon på $\mathbb{R}^3$, som varierer med tiden. Vi skriver ∂_t som en forkortet notasjon for $\partial/\partial t$.*

Vi skriver også kort $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ (der læreboken bruker $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$).

Gitt et reelt tall $t > 0$, definer t-ballen $B_t \subset \mathbb{R}^3$ og t-sfæren $S_t \subset \mathbb{R}^3$ ved

$$B_t = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| < t\}, \quad S_t = \partial B_t = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\boldsymbol{x}| = t\}.$$

Vi definerer distribusjoner $b_t, s_t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ ved

$$(b_t, \psi) = \int_{B_t} \psi \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}, \quad (s_t, \psi) = \int_{S_t} \psi \, \mathrm{d}S \qquad \text{for } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

a. Forklar hvorfor definisjonene ovenfor virkelig spesifiserer distribusjoner b_t og s_t. Vis at

$$\lim_{t \to 0} \frac{s_t}{4\pi t^2} = \delta \quad \text{og} \quad (b_t, \psi) = \int_0^t (s_\tau, \psi) \, \mathrm{d}\tau.$$

b. Vis at $\partial_t s_t = 2t^{-1} s_t + \Delta b_t$.

Bruk den likefremme definisjonen: At $\partial_t s_t$ er en distribusjon som tilfredsstiller $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s_t, \psi) = (\partial_t s_t, \psi)$ for alle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Hint: Start med $(s_t, \psi) = t^2 \int_{S_1} \psi(t\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S(\boldsymbol{x})$, ta den deriverte, flytt et integral tilbake til S_t, og bruk divergensteoremet.

c. Vis at $\partial_t \Delta b_t = \Delta \partial_t b_t = \Delta s_t$.

La $w_t = \frac{s_t}{4\pi t}$, regn ut $\partial_t w_t$, og vis at $\partial_{tt} w_t = \Delta w_t$ for $t > 0$.

d. Definer $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ ved

$$(w, \psi) = \int_0^\infty (w_t, \psi_t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{for } \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

Vis at w er en fundamentalløsning til bølgeoperatoren $\partial_{tt} - \Delta$.

Hint: Start med $(\partial_{tt} w, \psi) = (w, \partial_{tt}\psi)$, bruk definisjonen av w, og flytt så derivasjonene med hensyn på t tilbake til w_t. Du kan fritt bruke «produktregelen» (Leibniz's regel)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_t, \psi_t) = (\partial_t u_t, \psi_t) + (u_t, \partial_t \psi_t)$$

der u_t er en av de tidsavhengige distribusjonene du støter på, så lenge $\partial_t u_t$ eksisterer. Merk at delvis integrasjon ikke er annet enn Leibniz's regel «i revers».